UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

Desarrollos asintóticos

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Ma. del Carmen Escribano Ródenas

Madrid, 2015

U N I V E R S I D A D   C O M P L U T E N S E

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

"DESARROLLOS ASINTOTICOS"

Mª del Carmen Escribano Ródenas

Director : D. Enrique Linés Escardó

Madrid, Abril de 1.981

Desde estas líneas quiero expresar mi mas sincero agradecimiento a D. Enrique Linés Escardó , que ha sido director y colaborador en este trabajo.

Indice :

Introducción.-

Los desarrollos asintóticos son conocidos desde hace mas de un siglo, sin embargo, desde el principio fueron discutidos por los matemáticos debido a una aparente ausencia de rigor, dado el caracter divergente de las series que se usaban como instrumentos en la aproximación asintótica. Fué Poincaré quien por primera vez ,con motivo de los trabajos sobre perturbaciones en mecánica celeste, dió un sentido a las series divergentes, formadas como las tradicionales series de potencias. Estudió sus propiedades y desarrollos de algunas funciones en concreto.

Este trabajo trata en su primera parte, de agrupar una parte de conocimientos básicos sobre desarrollos asintóticos de forma general, y en la segunda, se aplica este estudio al caso concreto de desarrollos asintóticos de soluciones de ecuaciones diferenciales de tipo lineal y especialmente de tipo matricial.

El primer capítulo sólo es una introducción a las definiciones de desarrollos asintóticos que se dan en el segundo. Sin embargo se ha creido conveniente exponerlo previamente, para abreviar lo más posible todas las demostraciones sobre desarrollos asintóticos y sus propiedades. Aquí se definen las sucesiones y escalas asintóticas que daran lugar a los desarrollos. Uno de los resultados mas importantes del segundo capítulo, es el poder afirmar, bajo las mínimas condicones, que toda serie formal asintótica tiene una función de la cual es desarrollo asintótico, y no sólo para series de potencias, que son las que utilizaremos en los últimos capítulos.

En el tercer capítulo se vé la forma de operar con desarrollos asintóticos, y de que estas operaciones sean válidas con las funciones de las que son desarrollos asintóticos.

El capítulo cuarto consiste en una síntesis de diversos métodos empleados para obtener desarrollos asintóticos de funciones definidas por integrales. En él, sólamente hay una breve introducción, y enumeración de algunos de estos métodos, pues el tratamiento de alguno de ellos merece por sí sólo un estudio completamente aparte.

En el quinto capítulo comienza la segunda parte de este trabajo, y trata de aplicar todo lo estudiado hasta aquí, al tema concreto de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, por medio de los desarrollos asintóticos de las souciones ; se resuelve el problema de hallar el desarrollo asintótico de la función solución, lo cual determina realmente una clase de funciones, como ya se vió en los capítulos anteriores.

Esta forma de solucionar el problema de las ecuaciones diferenciales no es nuevo. Muchos matemáticos interntaron hallar soluciones de ecuaciones diferenciales en forma de series, lo que no originaba problemas mientras que las series que se presentaban eran convergentes; pero l encontrar desarrollos no convergentes, se les planteaba la cuestión de su utilidad y posible rigorización , desde el punto de vista analítico, lo que les estimuló a la consideración de los desarrollos asintóticos. Existen métodos, de origen formal, para la construcción de este tipo de soluciones con los que no siempre se llega a conclusiones generales, y sólamente son válidos para unos tipos concretos de problemas. En este capítulo quinto , sólamente estudiaremos un posible método, totalmente rigorizado, como ejemplo, pues el problema queda resuelto to9 talmente en el último capítulo, cuyo último teorema, fundamental, resume los esfuerzos de mas de cuarenta años de resultados parciales, que se remontan a los resultados de Horn y Birhoff (senior) del primer cuarto de siglo. Este teorema de Wasow, dificultoso en su demostración, tiene un enunciado preciso, cuando se hace uso de los resultados de la teoria de matrices, con toda la casuística de las formas canónicas.

En el último capítulo se aplican estas teorías a una ecuación diferencial lineal de segundo orden con singularidades en el origen, que no está tabulada en la colección de Kamke .

C A P I T U L O I

.- S U C E S I O N E S A S I N T O T I C A S -.

1.- Símbolos "O" y "o".

2.- Operaciones con los "O" y "o" .

3.- Sucesiones asintóticas.

4.- Sucesiones asintóticas deducidas de otras.

5.- Escalas asintóticas.

Introducción :

Los símbolos "O" y "o" son debidos a Landau y van a tener mucha importancia en este estudio, pues ellos son los que permiten medir la "proximidad " de dos funciones en el entorno de un punto. Para "medir" la diferencia entre dos funciones, como se trata en el entorno de un punto, es lógico considerar en primer lugar el límite de la diferencia hacia ese punto nulo, pero si nos paráramos ahí , tendríamos un criterio de aproximación muy pobre, pues bastaría aproximar una función por una simple constante, igual al límite de la misma en el punto considerado. Se vé pues, claramente, la necesidad de definir otros tipos de aproximación más exigentes entre dos funciones, lo que se consigue con el uso adecuado de los símbolos de Landau.

Ahora bien, para aproximar cada vez mejor la función se considerará un conjunto de funciones entre las cuales vamos a elegir para realizar esta aproximación. Este conjunto comenzará por ser una sucesión, es decir un conjunto numerable, y después se pasará a considerar un conjunto no numerable que llamaremos simplemente escala.

1.- Símbolos "O" y "o" .

Sean f y g dos funciones definidas sobre un espacio E topológico Hausdorff (T_2), a valores en un espacio de Banach M, y sean $C \subset E$ un conjunto abierto de E, y $x_o \in \bar{C}$ un punto de acumulación de C.

1.1. Definición

1.1.1. Se dice que $f \in O(g)$ en C si, y sólo si, existe una constante $A \in R^+ \cup \{o\}$, ($A \geq o$), independiente de $x \in C$, tal que $\|f(x)\| \leq A\|g(x)\|$ para todo $x \in C$, siendo $\|.\|$ la norma del espacio M.

1.1.2. Se dice que $f \in O(g)$ cuando x tiende a x_o si, y sólo si, existe una constante $A \in R^+ \cup \{o\}$ y un entorno $U(x_o)$ de x_o , tal que $\|f(x)\| \leq A \|g(x)\|$ para todo x perteneciente a $U(x_o)$.

1.2. Definición

Se dice que $f \in o(g)$ cuando x tiende a x_o si, y sólo si, para todo $\varepsilon \in R^+$, existe un entorno $U_\varepsilon(x_o)$ de de x_0 , que depende de ε, tal que $!!f(x)!! \leq \varepsilon !!g(x)!!$ para todo x perteneciente a U (x_0) .

Si $g \neq 0$, las definiciones anteriores son equivalentes a las siguientes :

i) $f \in O(g)$ en C (respectivamente cuando x tiende a x_0) si, y sólo sí , f/g está acotada en C (respectivamente cuando x tiende a x_0).

ii) $f \in o(g)$ cuando x tiende a x_0 si, y sólo si f/g tiende a cero cuando x tiende a x_0 .

1.3. Definición.

Sean $f(x, s_i)$, i=1,2, ... n, s_i parámetros , y $g(x,t_j)$, j=1,2,...m , t_j parámetros. Se dice que $f \in O(g)$ en C uniformemente respecto a los parámetros s_i, t_j sí, y sólo si existe una constante $A \geq 0$, independiente de los parámetros s_i, t_j , tal que $!!f(x,s_i)!! \leq A!!g(x,t_j)!!$ para todo x de C.

Análogamente se define la uniformidad para

$f \in O(g)$ cuando x tiende a x_0 y para $f \in o(g)$. En general cuando no se habla de uniformidad, se supone que la constante y los entornos dependen de los parámetros.

Por abuso de escritura, se escribe a menudo $f = O(g)$ (respectivamente $f = o(g)$) en lugar de $f \in O(g)$, (resp. $f \in o(g)$). Esta forma de llamar igual al conjunto y a los elementos del conjunto es bastante normal dentro de las matemáticas.

1.4. Proposición.

El símbolo O verifica :

i) $f=O(f)$

ii) Si $f=O(g)$ y $g=O(h)$, entonces $f=O(h)$.

Con lo cual la relación "O", resulta ser una relación de preorden entre funciones, ya que se verifican las propiedades reflexiva y transitiva. La demostración de esta roposición es directa a partir de las definiciones anteriores, tomando para i) $A=1$, y para ii) $A=A_1 \cdot A_2$.

1.5. Análogamente a la proposición anterior, es igual de fácil comprobar que la relación $f \; R \; g \Leftrightarrow (f=o(g)$ ó $f=g)$

es una relación de preorden, es decir verifica las propiedades reflexiva y transitiva. Además, la relación f=o(g) equivale a decir que f se anula en un entorno de x_o.

Sobre el conjunto de funciones no nulas (en cualquier entorno de x_o) la relación anterior induce una relación de orden que notaremos por $f \leqslant g \iff f R g$.

1.6. Ejemplos.

Sea $\mathbb{C}$ el plano complejo, y "a" una constante arbitraria, entonces se verifica que $e^{-z}= O(z^a)$ y que $e^{-z}= o(z^a)$ cuando z tiende a infinito , siendo $C_\gamma = \{ z \in C / -\frac{\pi}{2} + \gamma < \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \gamma$, con $\gamma > o$. Si $\gamma < o$ las relaciones anteriores son falsas .

En efecto, en C_γ , $z^a \neq o$, para todo z de C_γ, luego basta comprobar que $\lim_{z \to \infty} \frac{e^{-z}}{z^a} = o$. Sea z=x+iy , y a=c+id, con x, y, c, d números reales.

$$\left|\frac{e^{-z}}{z^a}\right| = \left|\frac{e^{-x-iy}}{e^{aLz}}\right| = \left|\frac{e^{-x-iy}}{e^{a(L|z|+i\arg z)}}\right| = \frac{e^{-x}}{e^{cL|z|-d\arg z}}$$

dargz está acotado en C_γ , luego $\lim_{x} \frac{e^{-x}}{e^{cL|z|-d\arg z}} = o$

Así pues con $\gamma > o$ tenemos asegurado el que x no pueda tender a menos infinito, lo que podría ocurrir si $\gamma < 0$.

2.- Operaciones con los "O" y "o" .

2.1. Proposición.

Sean f y g dos funciones como en el apartado anterior. Y sea "a" un número real estrictamente positivo , entonces si $f=O(g)$ se verifica que $\|f\|^a = O(\|g\|^a)$.

Demostración:

Por ser $f=O(g)$ existe $A \in R^+$ tal que $\|f(x)\| \leq A.\|g(x)\|$, ó lo que es equivalente $\|f(x)\|^a \leq A^a.\|g(x)\|^a$. Por lo tanto basta tomar como nueva constante A^a para que $\|f\|^a=O(\|g\|^a)$.

2.2. Proposición

Sean $f_i= O(g_i)$, con $i=1,2,\ldots K$, y $a_i \in C$, K constantes arbitrarias, entonces se tiene que

$$\sum_{i=1}^{K} a_i f_i = O(\sum_{i=1}^{K} |a_i| \cdot \|g_i\|)$$

Demostración:

Para todo $i=1,2,\ldots K$, existe $A_i \in R^+$ tales que $\|fi(x)\| \leq A_i \|g_i(x)\|$ por la hipótesis.

$$\left\|\sum_{i=1}^{K} a_i f_i(x)\right\| \leq \sum_{i=1}^{K} |a_i| \|f_i(x)\| \leq \sum_{i=1}^{K} |a_i| A_i \|g_i(x)\| \leq$$

$$\leq A \left(\sum_{i=1}^{K} |a_i| \|g_i(x)\| \right) .$$

Siendo $A = \text{máx}\{A_i \ , \ i=1,2,\ldots K\}$.(Si $f_i = O(g_i)$ cuando x tien- de a x_0 , el entorno adecuado es $U(x_0) = \bigcap_{i=1}^{K} U_i(x_0)$, siendo $U_i(x_0)$ los de la hipótesis.).

Esta proposición tambień es cierta cuando K es infinito, es decir, para series, sim embargo hay que tener en cuenta que entonces debe verificarse $f_i = O(g_i)$ uniformemente en i;ó lo que es lo mismo, ni las constantes A_i, ni los entornos U_i deben depender de i. Entonces existe una costante A y un entorno de x_0 que son fijos para todo i natural.

$\|f(x)\| \leq A\|g(x)\|$ para todo $i \in N$, $\forall x \in U(x_0)$.

Además la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \|g(x)\|$ debe converger para que la proposición tenga sentido, y tendríamos:

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x)\right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \|f_i(x)\| \leq A \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \|g_i(x)\| \quad \forall x \in U(x_0)$$

2.3. Proposición

Sean $f_i = O(g_i)$, i=1,2,...K, con a_i constantes, y $\|g_i\|$ $\|h\|$ para i=1,2,...K para todo $z \in C \bigcap U_i(x_0)$; entonces se tiene que $\sum_{i=1}^{K} a_i f_i = O(h)$.

Demostración:

Por ser $f_i = O(g_i)$ entonces existe A_i tal que $\|f_i(x)\| \leq A_i \|g_i(x)\|$ para todo x de $U_i(x_o)$.

$$\left\|\sum_{i=1}^{K} a_i f_i(x)\right\| \leq \sum_{i=1}^{K} |a_i| \|f_i(x)\| \leq \sum_{i=1}^{K} |a_i| A_i \|g_i(x)\| \leq A \|h(x)\| \sum_{i=1}^{K} |a_i|$$

Siendo $A = \text{máx}\{A_1, A_2, \ldots A_K\}$ y $U(x_o) = \bigcap_{i=1}^{K} U_i(x_o)$.

Esta proposición como la anterior, es válida también para K infinito siempre que $f_i = O(g_i)$ uniformemente en i, y que la serie real $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ conveja. La demostración es complemamente análoga.

Proposición.

Sean $f_i = O(g_i)$, i=1,2,...K, entonces se verifica

$$\prod_{i=1}^{K} f_i = O\left(\prod_{i=1}^{K} g_i\right)$$

La demostración es completamente análoga a la hecha en 2.2.

2.4. Pasamos a ver el comportamiento de los símbolos cuando se trata de integraciones.

Proposición:

Proposición

Sea (E,M,n) un espacio de medida con una topología de espacio de Hausdorff, y sean f,g dos funciones de $B \subset E\times E$, en un espacio de Banach $(H, \|\cdot\|)$. Sea $f(x,y)=O(g(x,y))$ uniformemente en $x \in C$, con $C\subset E$ medible, cuando y tiende a y_0 en S, y $C\times S\subset B$. Si f y g son mediblees en C, como funciones de x, para cada y fijo, entonces se verifica que $\int_C f(x,y)dn(x) = O\left(\int_C \|g(x,y)\|dn(x)\right)$ cuando y tiende a y_0 .

Generalización Erdélyi pag.7 .

Demostración:

Por la uniformidad de O, existen A y $U(y_0)$ tales que $\|f(x,y)\| \leq A\|g(x,y)\|$ para todo x C, y $U(y_0)$.

$$\left\|\int_C f(x,y)dn(x)\right\| \leq \int_C \|f(x,y)\|dn(x) \leq \int_C A\|g(x,y)\|dn(x) =$$

$$= A\int_C \|g(x,y)\|dn(x). \quad \text{Para todo } x\in C,\ y\in U(y_0).$$

Proposición.

Sean $x,z \in \mathbb{C}$, y $\gamma(z)$ un camino diferenciable con continuidad a trozas en el abierto C de $\mathbb{C}$, con $\gamma(z) :]a(z), b[\longrightarrow \mathbb{C}$, de z a z_0. Sean f y g dos funciones complejas de variable compleja , y $f=O(g)$

cuando z tiende a z_o . Si f y g son medibles en $\gamma(z)$, entonces $\int_{(z)} f(x)dx = O(\int_{(z)} |g(x)||dx|)$ cuando z tiende a z_o.

Generalización Erdélyi pag. 7

Demostración:

Por ser $f=O(g)$, existen A y $U(z_o)$ tales que $|f(z)| \leq A|g(z)|$ para todo z de $U(z_o)$.

$$\left|\int_{(z)} f(x)dx\right| \leq \int_{(z)} |g(x)||dx| \leq A\int_{(z)} |g(x)||dx| .$$

Es conveniente hacer notar que todas las proposiciones que se han demostrado en este apratado son análogas para el símbolo "o", mientras no se indique expresamente lo contrario.

2.5. En general la diferenciabión no es posible con estos símbolos, ni con respecto a la variabke independiente ni con respecto a parámetros, salvo en casos muy excepcionales o triviales.

2.6. Proposición.

Sean f y g dos funciones del espacio topológico E Hausdorff en el de Banach (M, || ||). Entonces se verifican las siguientes propiedades :

o) Si $f = o(g)$ entonces $f = O(g)$.

i) $O(O(f)) = O(f)$.

ii) $O(o(f)) = o(O(f)) = o(o(f)) = o(f)$.

iii) $O(f)O(g) = O(fg)$.

iv) $O(f)o(g) = o(f)o(g) = o(fg)$.

v) $O(f) + O(g) = O(f) + o(g) = O(f)$.

vi) $o(f) + o(f) = o(f)$.

Demostración:

o) Evidente.

i) Vista ya en 1.4.

ii) Sea $\varepsilon > o$, entonces existe $U_1(x_o)$ tal que

$\|O(o(f))(x)\| \leq A_1 \|o(f)(x)\| \leq A_1 \varepsilon / A_1 \|f(x)\| = \varepsilon \|f(x)\|$

para todo x de $U(x_o) = U_1 \cap U_2$. Pues para la segunda desigualdad basta tomar $\varepsilon_1 = \varepsilon / A_1$ y el $U_2(x_o)$.

Luego $O(o(f)) = o(f)$.

iii) Se comprueba la desigualdad siguiente:

$\|O(f)O(g)\| \leq A_1 \|f\| A_2 \|g\| = (A_1 A_2) \cdot \|fg\|$.

iv) Sea $\varepsilon > o$, y $U_1(x_o)$ el correspondiente a $\varepsilon_1 = \varepsilon / A_1$,

y $U_2(x_o)$ el correspondiente a la constante que existe A_1.

$\|O(f)o(g)(x)\| \leq A_1 \|f(x)\| \varepsilon / A_1 \|g(x)\| = \varepsilon \|f(x)g(x)\|$

para todo x de $U = U_1 \cap U_2$.

Sea $\varepsilon > o$, tomamos $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon}$ luego existe $U_1(x_o)$ y $U_2(x_o)$

$\|o(f)o(g)(x)\| \leq \sqrt{\varepsilon}\|f(x)\|\sqrt{\varepsilon}\|g(x)\| = \varepsilon \|f(x)g(x)\|$

para todo x de $U = U_1 \cap U_2$.

v) Existen A_1 y A_2 tales que $\|(O(f) + O(g))(x)\| \leq$

$\leq \|O(f(x))\| + \|O(g(x))\| \leq A_1\|f(x)\| + A_2\|g(x)\| =$

$= A \|f(x)\|$, para todo x de $U = U_1 \cap U_2$, y siendo

$A = \text{máx}\ (A_1, A_2)$, ó $A = A_1 + A_2$.

Para la otra igualdad existen A y $U_1(x_o)$, y tomando $\varepsilon = 1$, y el correspondiente $U_2(x_o)$ se verifica que

$\|(O(f) + o(f))(x)\| \leq \|O(f)(x)\| + \|o(f)(x)\| \leq$

$\leq A \|f(x)\| + \|f(x)\| = (A+1)\|f(x)\|$, para

todo x de $U_1\ U_2$.

vi) Análogo a los anteriores.

Resulta evidente que todas estas expresiones siguen siendo válidas si se reiteran un número finito de veces .

Hay que tener en cuenta que expresiones del tipo $O(f) + O(g) = O(f + g)$ son falsas completamente , lo mismo que para el "o" .

3.- <u>Sucesiones asintóticas.</u>

3.- Sucesiones asintóticas.

3.1. Sea E un espacio topológico Hausdorff, y $C \subset E$, sea z_0 un punto de acumulación de C, y $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ una sucesión de funciones definidas sobre C a valores en un espacio de Banach.

Definición.

Se dice que la sucesión $\{fn\}_{n \in N}$ es una sucesión asintótica cuando x tiende a x_o, si, y sólo si para cada $n \in N$, se tiene que $f_{n+1}=o(f_n)$ cuando x tiende a x_o $(x \in C)$.

Se dice que $\{f_n\}_{n \in N}$ es una sucesión asintótica uniformemente en n cuando x tiende a x_o, si para cada $\mathcal{E} > 0$ existe un entorno de x_o, $U(x_o)$, independiente de n, tal que $\|f_{n+1}(x)\| \leq \mathcal{E}\|f_n(x)\|$, para todo x de $U(x_o) \cap C$, y para todo n, es decir si $f_{n+1} = o(f_n)$ uniformemente en n cuando x tiende a x_o.

Si las f_n dependen de parámetros, y $f_{n+1} = o(f_n)$ uniformemente en los parámetros, se dice que $\{f_n\}_{n \in N}$ es una sucesión uniformemente asintótica respecto de los parámetros .

3.2. Ejemplos

Las sucesiones asintóticas mas usuales son las de potencias, y el punto x_o suele ser el punto del infinito, aunque si el punto fuera el origen basta hacer el cambio $x=1/t$ para volver a obtener el infinito ; si el punto no es el origen basta hacer la traslación $x = x_o + t$ y obtener de nuevo el origen .

3.2.1. $\{(x-x_o)^n\}_{n\in N}$ cuando x tiende a x_o y $E=M=\mathbb{C}$. Se puede considerar como conjunto C un abierto de $\mathbb{C}$ y siempre que hablemos de un entorno de x_o, $U(x_o)$, podemos considerarlo reducido sin perder nada de generalidad , $U^*(x_o) = U(x_o) - \{x_o\}$, con lo cual se puede tomar $(x-x_o) \neq 0$, para todo x de $U^*(x_o)$. y $f_n(x) = (x-x_o)^n$. Sea $\varepsilon > 0$, $\left| \frac{(x-x_o)^{n+1}}{(x-x_o)^n} \right| = |(x-x_o)| < \varepsilon$ para todo x de $U^*(x_o)$, siendo $U(x_o) = \{ x \quad C \ / \ |x-x_o| < \varepsilon \}$. Así pues queda demostrado que $\{ (x-x_o)^n \}$ es una sucesión uniformemente asintótica en n, cuando x tiende a x_o, pues el entorno no depende de n.

3.2.2. Sea $E=M=\mathbb{C}$, $C \subset \mathbb{C}$ abierto , y x_o el punto del infinito y $f_n(z)= z^{-n}$, $z \in C$. Como $z^{-n} \neq o$ para todo $z \neq 0$, consideramos $\left| \frac{z^{-(n+1)}}{z^{-n}} \right| = \left| \frac{1}{z} \right| < \varepsilon$ tomando $U(x_o) = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| > 1/\varepsilon \}$ .Así pues esta es otra sucesión asintótica uniformemente en n, cuando z tiende a infinito.

3.2.3. Sea $E=M=\mathbb{C}$, y $C= \{ z \in \mathbb{C} / \ |z| \geq 1$ y $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta$ con $\delta > o$ y consideramos $f_n(z) = z^{-h_n}$, con $h_n \in \mathbb{C}$ para cada $n \in N$, y $Re(h_n) < Re(h_{n+1}) \}$. Y sea x_o el punto del infinito , entonces se tiene

$|f_{n+1}(z)/f_n(z)| = | z^{-h_{n+1}} / z^{-h_n} | = | z^{h_n - h_{n+1}} | =$

$= | \exp (h_n - h_{n+1})(L|z| + i \arg z)| =$

$= \exp(Re(h_n - h_{n+1})L|z| - Im(h_n - h_{n+1}) \arg z)$.

Pero $Re(h_n - h_{n+1}) = F_n$ constante negativa , y $L|z| \geq 0$ cuando $|z| \geq 1$, y además $Re(h_n - h_{n+1})L|z|$ tiende a menos infinito cuando z tiende a infinito en C .

$Im(h_n - h_{n+1})= Kn$ constante y $|\arg z| \leq \pi/2$ luego $Im(h_n - h_{n+1})\arg z \leq Jn$ constante para cada $n \in N$:

Luego $|f_{n+1}(z)/f_n(z)|$ tiende a cero por tender a menos infinito $Re(h_n - h_{n+1})L|z|$ cuando z tiende a infinito en C.

Con lo que queda demostrado que $\{ z^{-h_n} \}_{n \in N}$ es una sucesión asintótica cuando z tiende a infinito en C, pero no es uniformemente asintótica en n, pues los entornos dependen de n, salvo si las constantes Kn y Jn fueran iguales para todo n .

3.2.4.Sea E= $\mathbb{C}$, y C un abierto de $\mathbb{C}$, y $f_n(z)= z^{-h_n}$ con h_n números reales para todo n , y $h_{n+1} > h_n$. Y el punto del infinito el x_o, entonces $\{z^{-h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión asintótica . Es un caso particular del 3.2.3.

3.2.5. Sean E = $\mathbb{C}$ = M, y h_n números complejos para todo n natural , y sea el abierto C como en 3.2.3. . Se considera $f_n(z) = e^z \cdot z^{-h_n}$ para cada z de $\mathbb{C}$. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión asintótica cuando z tiende a infinito en C, pero no uniformemente asintótica . Se prueba de forma análoga a 3.2.3.

4.- Sucesiones asintóticas deducidas de otras.

Vamos a obtener sucesiones asintóticas deducidas de otras basandonos en las expresiones de 2.6.

En las siguientes proposiciones consideraremos siempre, salvo que se diga explícitamente lo contrario, un espacio topológico Hausdorff E, y C un conjunto abierto de E, x_o será un punto de acumulación de C, y las funciones f_n , g_n , h_n seran funciones definidas sobre C, a valores en un espacio de Banach $(M, \|\ \|)$.

4.1. Proposición.

Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión asintótica cuando x tiende a x_o . Cualquier subsucesión de $\{f_n\}_{n\in N}$ es una sucesión asintótica.

Demostración :

Sea $\{f_{n_j}\}_{j\in N}$ la subsucesión de $\{f_n\}_{n\in N}$ .Se trata de probar que $f_{n_{j+1}} = o(f_{n_j})$ cuando x tiende a x_o.
Sea $n_{j+1} - n_j = h\in N$, se tiene $f_{n_{j+1}} = o(f_{n_{j+1}-1}) = o(o(f_{n_{j+1}-2}))$ $= o(f_{n_{j+1}-2})$, e iterando el proceso h veces, resulta, aplicando 2.6. $f_{n_{j+1}} = o(f_{n_j})$.

4.2. Proposición.

Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión asintótica cuando x tiende a x_o , entonces la sucesión $\{\|f_n\|^a\}_{n\in N}$, con $a > o$, es una sucesión asintótica.

Demostración:

Basta tener en cuenta 2.1.

4.3. Definición.

Sean $\{f_n\}_{n\in N}$ y $\{g_n\}_{n\in N}$ dos sucesiones de funciones definidas sobre C.Se dice que son equivalentes si, y sólo si , $f_n=O(g_n)$ y $g_n=O(f_n)$ para cada n natural en C.

Proposición.

Si $\{f_n\}_{n\in N}$ y $\{g_n\}_{n\in N}$ son dos sucesiones equivalentes de funciones definidas sobre C, y $\{f_n\}_{n\in N}$ es una sucesión asintóticamcuando x tiende a x_o ; entonces $\{g_n\}_{n\in N}$ también es una sucesión asintótica cuando x tiende a x_o.

Demostración:

Sea $n\in N$.Teniendo en cuenta 2.6. es $g_{n+1}=O(f_{n+1})=$ $=O(o(fn))=o(f_n)=o(O(g_n))=o(g_n)$ cuando x tiende a x_o.

4.4.Proposición.

Sean $\{f_n\}_{n\in N}$ y $\{g_n\}_{n\in N}$ dos sucesiones asintó - ticas cuando x tiende a x_o; entonces $\{f_n g_n\}_{n\in N}$ es una sucesión asintótica cuando x tiende a x_o.

Demostración:

$f_{n+1}g_{n+1} = o(f_n)o(g_n)=o(f_ng_n)$ cuando x tiende a x_o para cada n natural, teniendo en cuenta 2.6.

4.5. Proposición.

Sean $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión asintótica definida sobre C, cuando x tiende a x_o, y $a_{n,i}$ conn $n\in N$, $i=0,1,2,\ldots K$ un conjunto de constantes reales positivas, tales que $a_{n+1,i}\leqslant a_{n,i}$ para cada par n,i, y sea la función real positiva definida por $g_n(x) = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i}\|f_{n+1}(x)\|$, para cada $n\in N$. Entonces se verifica que $\{g_n\}_{n\in N}$ es una sucesión asintótica cuando x tiende a x_o.

Demostración:

Por ser $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión asintótica, para cada n natural, y para cada $\varepsilon>0$, existe un entorno $Un(x_o)$ tal que $\|f_{n+1}(x)\|\leqslant\varepsilon\|f_n(x)\|$ en $U_n(x_o)\cap C$. Si para este $\varepsilon>0$, tomamos $U_n^k(x_o)=\bigcap_{i=0}^{k} U_{n+i}(x_o)$ tendremos que $\|f_{m+1}(x)\|\leqslant\varepsilon\|f_m(x)\|$ con $x\in U_n^k(x_o)\cap C$, y $m=n,n+1,\ldots n+k$.

$g_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_{n+1,i}\|f_{n+i+1}(x)\|\leqslant\varepsilon\sum_{i=0}^{k} a_{n,i}\|f_{n+i}(x)\|= g_n(x)$ para todo $x\in U_n^k(x_o)$.

4.6. Teorema

Sean $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones asintótica, uniformemente en n, cuando x tiende a x_o, definidas en C, y x_o un punto de acumulación de C. Se consideran $a_{n,i}$, $n\in N$, $i=o,1,2,\ldots$ un conjunto de constantes reales positivas tales que $a_{n+1,i}\leq a_{n,i}$ para todo par n,i. Sea para cada n natural, la serie real positiva $g_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n,i}\|f_{n+1}(x)\|$. Si la serie infinita g_1 converge en un entorno $U(x_o)$ de x_o, entonces existe un conjunto C_o de C, tal que x_o es un punto de acumulación de C_o, todas las series infinitas g_n convergen en C_o, y $\{g_n\}_{n\in N}$ es una sucesión asintótica, uniformemente respecto de n, cuando x tiende a x_o en C_o .

Demostración:

Por ser $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión asintótica uniformemente respecto n, tomando $\varepsilon= 1$, existe un entorno de x_o, $U_1(x_o)$, tal que se verifica que $\|f_{n+1}(x)\|\leq\|f_n(x)\|$ para todo x $U_1(x_o) = C_1$ y para todo n natural, y x_o continúa siendo de acumulación de C_1. Se tiene

$$g_{n+1}(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_{n+1,i}\|f_{n+i+1}(x)\|\leq \sum_{i=0}^{\infty} a_{n,i}\|f_{n+i}(x)\|\leq\ldots\leq$$
$$\leq\ldots\leq \sum_{i=0}^{\infty} a_{1,i}\|f_{i+1}(x)\| = g_1(x) .$$

Luego todas las series infinitas g_n, con $n\geq 1$, convergen por estar dominadas por g_1 que converge en $U(x_o)$ por hipótesis. Sea $C_2= U(x_o)\cap C$, con lo que x_o continúa siendo punto de acumulación de C_2. Sea $C_o=C_1 \cap C_2$. Todas las series g_n convergen en C_o y x_o es un punto de acumulación de C_o. Sea $\varepsilon > o$, por la uniformidad de $\{f_n\}_{n \in N}$, existe un entorno $U^*(x_o)$ tal que $\|f_{n+1}(x)\| \leq \varepsilon \|f_n(x)\|$ para todo x de $U^*(x_o)$. Se tiene

$$g_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+1,i} \|f_{n+i+1}(x)\| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} a_{n,i} \|f_{n+i}(x)\| =$$

$$= \varepsilon\, g_n(x) \quad , \text{ para todo x de } C_o \cap U^*(x_o) = U_o(x_o) \text{ entorno de } x_o.$$

4.6. Proposición .

Sea (E, M,p) un espacio de medida con una topología de espacio de Hausdorff, y f_n n N funciones definidas sobre H c ExE en un espacio de Banach $(B,\| \ \|)$. Se considera $\{f_n(x,y)\}_{n \in N}$ una sucesión asintótica uniformemente en $x \in C$, con C c E medible, cuando y tiende a y_o en S, con CxS c H. Si las integrales $g_n(y)=\int_C \|f_n(x,y)\| dp(x)$ existen, entonces $\{g_n(y)\}_{n \in N}$ es una sucesión asintótica cuando y tiende a y_o.

Para asegurar la existencia de todas las integrales basta suponer que las f_n, con n natural son medibles, y que existe $g_1(y)$, pues las demas g_n con $n > 1$ las podemos dominar por g_1, como en la proposición anterior ,

, si la sucesión es asintótica uniformemente en n, tomando $\varepsilon = 1$ y $!!f_{n+1}(x,y)!! \leq !!f_n(x,y)!!$ para $x \in C$, y $U(y_o)$, $n \in N$ con lo cual quedará $g_n(y) = \int_C !!f_n(x,y)!!dp(x) \leq$
$\leq \int_C !!f_{n-1}(x,y)!!dp(x) \leq \ldots \leq g_1(y)$.

Demostración:

$g_{n+1}(y) = \int_C !!f_{n+1}(x,y)!!dp(x) = \int_C !!o(f_n(x,y))!!dp(x) =$

y aplicando 2.4. queda $= o(\int_C !!f_n(x,y)!!dp(x)) = o\,(g_n(y))$.

Proposición .

Sean $x,z \in C$, y sea $\gamma(z)$ un camino diferenciable con conitunidad a trozos en el abierto $C \subset C$, y $\gamma(z)$: $]a(z), b[\longrightarrow C$, de z a z_o. Sean $\{f_n(z)\}_{n\in N}$ una sucesión asintótica de funciones complejas de variable compleja, cuando z tiende a z_o. Si las integrales $g_n(z) = \int_{\gamma(z)} !!f_n(x)!!!!dx!$ existen , entonces $\{g_n\}_{n\in N}$ es una sucesión asintótica cuando z tiende a z_o.

Para la existencia de las integrales g_n, con n natural, basta suponer las mismas condiciones de la proposición anterior.

La demostración de esta proposición es análoga a la anterior.

4.7. En general, la diferenciación de una sucesión asintótica no es una sucesión asintótica. Como ejemplo basta tomar $f_n(x) = x^{-n}(a + \cos x^n)$, con x R, y x_o el punto del infinito. $f'_n(x) = -nx^{-1}(x^{-n}(a+\cos x^n) + \operatorname{sen} x^n)$.

5 -Escalas asintóticas.

Teniendo en cuenta la relación de orden definida en 1.5., se trata ahora de generalizar la idea de sucesión asintótica, mediante un conjunto de funciones no numerable.

5.1. Definición.

Sea $\mathcal{E}$ un conjunto de funciones definidas sobre un espacio topológico X de Hausdorff, a valores en un espacio de Banach (M, !! !!), y no nulas en un abierto C de X, tal que x_o es un punto de acumulación de C, y las funciones no son nulas sobre cualquier entorno de x_o. Se dice que $\mathcal{E}$ constituye una escala asintótica cuando x tiende a x_o si $\mathcal{E}$ está totalmente ordenado por la relación

$f \, R \, g \Leftrightarrow f=o(g)$ ó $f=g$, denotada por $\leq$. Es decir, constituye una escala asintótica si para cada par de funciones $f,g \in \mathcal{E}$, $f \neq g$, se verifica que $f=o(g)$ ó $g=o(f)$.

Resulta evidente de la definición que si $\mathcal{E}$ es una escala asintótica, toda parte $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ constituye una escala asintótica, llamada subescala asintótica de $\mathcal{E}$.

5.2. Ejemplos.

Veamos algunos ejemplos de escalas asintóticas en el entorno de un punto x_0 de $\bar{R}$.

5.2.1. Sea $\mathcal{P}_R$ el conjunto de funciones x^α con $\alpha \in R$. Resulta evidente que en el $x_0=\infty$ estas funciones forman una escala asintótica. Basta probar que $x^\alpha \leq x^\beta$ equivale a decir que $\alpha \leq \beta$.

Las funciones x^n con $n \in Z$ forman una subescala asintótica de $\mathcal{P}_R$ que llamaremos $\mathcal{P}_Z$.

5.2.2. Las funciones $x^\alpha \operatorname{Log}^\beta x$ definidas para todo par $(\alpha,\beta) \in R^2$, y $x \geq 1$ se comprueba fácilmente que para $x_0=\infty$

forman una escala asintótica pues $x^{\alpha}\mathrm{Log}^{\beta}x \leq x^{\alpha'}\mathrm{Log}^{\beta'}x$ si, y sólo si $\alpha < \alpha'$ ó sí $\alpha = \alpha'$ entonces $\beta \leq \beta'$, que es una relación de orden total en R^2 (orden lexicográfico). A esta escala la llamaremos $\mathcal{L}_1$.

5.2.3. Sea $\mathcal{F}_1$ el conjunto de funciones de la forma $x^{\alpha} e^{p(x)}$, donde $\alpha \in R$ y $p(x)$ es un polinomio sin término constante . Veamos que $\mathcal{F}_1$ es una escala asintótica para el infinito. Sea $c(p)$ el coeficiente del término de mayor grado del polinomio p, entonces $\lim_{x \to \infty} e^{p(x)} = 0$ si, y sólo si $c(p) < 0$. Con lo cual para que $\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} e^{p(x)} = 0$ es necesario y suficiente que $c(p) < 0$, ó que si $p=0$ entonces $\alpha < 0$. De esta forma $x^{\alpha} e^{p(x)} \leq x^{\alpha'} e^{q(x)}$ sí, y sólo si $c(p-q) < 0$, ó si $p= q$ entonces $\alpha < \alpha'$.

La escala definida en 5.2.1. $\mathcal{P}_R$ es una subescala asintótica de $\mathcal{L}_1$ y de $\mathcal{F}_1$.

5.2.4. El conjunto $\mathcal{L}_2$ formado por las funciones $x^{\alpha}\mathrm{Log}^{\beta_1}x\mathrm{Log}_2^{\beta_2}x$, con $(\alpha, \beta_1, \beta_2) \in R^3$, y $x > e$ forma una escala asintótica cuando x tiende a $x_0 = \infty$ tomando $\mathrm{Log}_2 x = \mathrm{Log}(\mathrm{Log}x)$, logaritmo reiterado 2 veces .

Para ver que $x^{\alpha}\operatorname{Log}^{\beta_1}x \operatorname{Log}_2^{\beta_2}x \leq x^{\alpha'}\operatorname{Log}^{\beta_1'}x \operatorname{Log}_2^{\beta_2'}x$, basta ver que $(\alpha,\beta_1,\beta_2) \leq (\alpha',\beta_1',\beta_2')$ en el orden lexicográfico de R^3.

De forma general, definiendo por $\operatorname{Log}_m x$ el logaritmo reiterado de orden m, por las relaciones de recurrencia $\operatorname{Log}_1 x=\operatorname{Log} x$, y $\operatorname{Log}_m x = \operatorname{Log}(\operatorname{Log}_{m-1}x)$, para todo m de $N - \{0\}$, y para todo $x \geq e_{m-1}$, donde e_m es la sucesión definida por las relaciones de recurrencia $e_0 = 0$, $e_{m+1}=e^{e_m}$, podemos definir $\mathcal{L}_m$, con m fijo como el conjunto de funciones $x^{\alpha}\operatorname{Log}^{\beta_1}x \operatorname{Log}_2^{\beta_2}x\operatorname{Log}_3^{\beta_3}x \ldots \operatorname{Log}_m^{\beta_m}x$, con $(\alpha,\beta_1,\beta_2 \ldots \beta_m)$ de R^{m+1} . $\mathcal{L}_m$ así definido constituye una escala asintótica para el punto del infinito, con la relación de orden total inducida por el orden lexicográfico de R^{m+1}.

5.2.5. Sea $\mathcal{L} = \bigcup_{m \in N - \{0\}} \mathcal{L}_m$. Este conjunto resulta ser otra escala asintótica para el infinito, de forma que cada $\mathcal{L}_m$ es una subescala asintótica.

5.2.6. Sea $\mathcal{E}$ una escala asintótica para el punto del infinito, formada por funciones tales que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Entonces el conjunto formado por las funciones $e^{f(x)}$ es también una escala asintótica para el infinito deducida de $\mathcal{E}$.

Sea, por ejemplo, la subescala asintótica $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{T}_1$ formada por las funciones $x^{\alpha} e^{p(x)}$ donde $\alpha > 0$ y $p(x)$ es un polinomio de coeficientes positivos. El conjunto $\mathcal{G}_2$ de las funciones $e^{f(x)}$, donde $f \in \mathcal{G}_1$, es una escala asintótica. De esta forma mas general, se puede definir por recurrencia la escala $\mathcal{G}_m$ como el conjunto de funciones $e^{f(x)}$, donde $f \in \mathcal{G}_{m-1}$. Incluso se puede probar fácilmente que $\mathcal{G} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}-\{0\}} \mathcal{G}_m$ es otra escala asintótica.

5.2.7. Las funciones $|x|^{\alpha} |\mathrm{Log}x|^{\beta}$ con $\alpha,\beta \in R$ forman una escala asintótica para el origen .

C A P I T U L O II

.- D E S A R R O L L O S A S I N T O T I C O S -.

1.- Distintas definiciones.

2.- Funciones definidas por un desarrollo asintótico.

3.- Ejemplos.

Introducción :

Los desarrollos asintóticos fueron tratados por Henri Poincaré en 1.886 (Acta Mat. 8,295-344), y a él se debe la definición mas utilizada. Sin embargo, esta primera definición se ha ido mejorando y generalizando, y es por lo que se dan otras tres, que amplian la primera cada una en un sentido.

1.- Distintas definiciones de desarrollos asintóticos.

Sea E un espacio topológico Hausdorff, y sean f , f_n , con $n \in N$ funciones definidas sobre C, a valores en un espacio vectorial de Banach (M , !! !!). Con $C \subset E$ y K el cuerpo.

1.1. Definición de Poincaré

Sea $C \subset M$ un subconjunto abierto, y sea $x_o \in C$ un punto de acumulación de C. Sean $\{ f_n(x) \}_{n \in N}$ una sucesión asintótica cuando $x \to x_o$, y f una función definida sobre C a valores en M. Entonces se dice que f(x) tiene un desarrollo asintótico relativo a la sucesión $\{ f_n(x) \}_{n \in N}$ de orden H, cuando $x \to x_o$ si, y sólo si, existen constantes c_k tales que es

$$f(x) = \sum_{k=1}^{H} c_k f_k(x) + o(f_H) \quad , \text{ con } c_k \in K \text{ cuerpo}$$

cuando $x \to x_o$. Cuando esto ocurra se escribirá :

$$f(x) \sim \sum c_n f_n(x) \quad \text{de orden } H \text{ cuando } x \to x_o$$

en C.

Un desarrollo de orden 1 se denomina representación asintótica ó parte principal.

Cuando el desarrollo es de orden J, para todo $K \leq J$, f admite un desarrollo de orden K, símplemente truncando el desarrollo de orden J en el término K (basta tener en cuenta la proposición 2.6 del capítulo anterior, ya que $f = \sum_{k=1}^{J} c_k f_k + o(f_J) = \sum_{k=1}^{K} c_k f_k + c_{k+1} f_{k+1} +$
$+ c_{k+2} f_{k+2} + \ldots + c_J f_J + o(f_J) = \sum_{k=1}^{K} c_k f_k +$
$+ c_{k+1} o(f_K) + \ldots + c_J o(f_{J-1}) + o(o(f_{J-1})) = \ldots =$
$= \sum_{k=1}^{K} c_k f_k + o(f_K)$.

Si el desarrollo es de orden cualquiera, es decir $J = \infty$, entonces escribiremos $f(x) \sim \sum c_n f_n(x)$ cuando $x \to x_0$ en C .

Es importante observar que si existe el desarrollo asintótico finito ó infinito de f relativo a $\{f_n\}_{n \in N}$ cuando $x \to x_0$ en C, la determinación de las constantes c_n , $n \in N$ es directa, pues basta utilizar reiteradamente la fórmula siguiente :

$$c_n = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in C}} \left[\left(f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k f_k(x) \right) / f_n(x) \right]$$

1.2. Una propiedad curiosa que encierra una doble condición referente al carácter asintótico de una sucesión y al desarrollo de una función según esta sucesión asintótica, es el siguiente teorema de A.G. Mackie .

Proposición:

Sean H + 1 funciones , f, f_1, f_2, . . . f_H , definidas en C. Si los límites $c_n = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in C}} \left[\left(f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k f_k(x) \right) / f_n(x) \right]$ existen , y además son $c_n \neq$ o para n = 1,2, . . .H entonces $\{ f_n \}_{n=1,2,\ldots H}$ es una sucesión asintótica de orden H, para $x \to x_0$ y $\sum_{n=1}^{H} c_n f_n$ es un desarrollo asintótico de orden H para f cuando $x \to x_0$.

Demostración:

De la existencia de los límites c_m, resulta que para m = 1, 2,...H-1 se tiene

$$f(x) - \sum_{n=1}^{m} c_n f_n(x) = O(f_{m+1}) = O(o(f_m)) = o(fm), \text{ y}$$

del límite c_{m+1} , resulta igualmente

$$f(x) - \sum_{n=1}^{m} c_n f_n(x) = f_{m+1}(x)\ c_{m+1} + o(f_{m+1}).$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones obtenemos

$$(c_{m+1} + o(1))\ f_{m+1} = o(f_m) \text{ para } m= 1,2,\ldots H-1$$

si $x \to x_0$ en C. Como $c_{m+1} \neq$ o , entonces $c_{m+1} + o(1) \neq$ o en cierto entorno de x_0 , por lo cual podemos dividir por este factor y obtenemos $f_{m+1} = o(f_m)$ para $x \to x_0$, y en consecuencia $\{f_n\}$ es una sucesión asintótica . Ademas $\sum_{n=1}^{H} c_n f_n$ es un desarrollo asintótico de f cuando $x \to x_0$, por la existencia de c_H .

1.3. Veamos ahora un ejemplo que va a servir para dar una nueva definición .

Ejemplo : Sea f una función real de variable real, en cuyas condiciones de regularidad no entramos, pero se supone que puede ser representada por una serie de funciones de Bessel. $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i J_i(x)$, donde las a_i son constantes. En un entorno del origen la sucesión $\{J_i(x)\}$ forma una sucesión asintótica . Y puesto que $J_i(x) = O(x^i)$ cuando $x \to o$, podemos decir que $f(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i J_i(x) +$ $+ o(x^N)$. Así pues se observa que $\{J_n(x)\}_{n \in N}$ es la sucesión asintótica utilizada en el desarrollo asintótico, y sin embargo la sucesión asintótica $\{x^n\}_{n \in N}$ está utilizada para medir la aproximación . Esta dá una nueva idea de definir los desarrollos asintóticos .

Segunda definición de desarrollo asintótico.

Sean las funciones f, f_1, f_2, . . . f_H, g_1, g_2, ... g_H

definidas en C abierto del espacio E. Y sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones asintóticas de orden N cuando $x \to x_o$. Se dice que f tiene un desarrollo asintótico de orden N, $f \sim \sum f_n$ relativo a la sucesión asintótica $\{g_n\}$ $n \in N$ cuando $x \to x_o$ si, y sólo si, $f = \sum_{n=1}^{N} f_n + o(g_k)$ para cada k, con $o < k \leq N$. Sin embargo, esta definición no ha encontrado muchas aplicaciones.

1.4. Ejemplo :

Sea la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty}$ sen nx/x^n, para $x \in R$ y $|x| > 1$. De acuerdo con las definiciones anteriores esta serie no es un desarrollo asintótico en ningún caso cuando $x \to \infty$, puesto que $\{x^{-n} \text{sen } nx\}$ no es una sucesión asintótica. Ya que si lo fuera se debería verificar que para cada $\varepsilon > o$ $\left|\frac{\text{sen}(n+1)x}{x^{n+1}}\right| \leq \varepsilon \left|\frac{\text{sen } nx}{x^n}\right|$ ó $\left|\frac{\text{sen}(n+1)x}{x}\right| \leq \varepsilon \left|\text{sen } nx\right|$.

para cada n fijo y con $|x| \geq M > o$. Sin embargo basta tomar $x = k\pi/n$, con $k \geq Mn/\pi$ para que el segundo miembro de la desigualdad se anule y sin ser nulo el primero .

Definición

Definición

Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión asintótica en C, para $x \to x_0$. Llamaremos clase $\mathcal{C}$, a la clase de las funciones c(x) definidas en C, con las siguientes propiedades :

i) Toda función c(x) está acotada cuando $x \to x_0$ en C.

ii) Si $c(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$ en C, y $c \in \mathcal{C}$, entonces $c(x) \equiv 0$.

iii) La combinación lineal de funciones de $\mathcal{C}$ es una función de .

Tercera definición de desarrollo asintótico .

Se dirá que la función f definida en C tiene un desarrollo asintótico de orden m cuando $x \to x_0$ en C, en el sentido generalizado si, y sólo si $f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i(x) f_i(x) + o(f_m(x))$, donde $c_i \in \mathcal{C}$.

Es importante hacer constar que los anteriores coeficientes constantes empleados hasta ahora, pasan a ser funciones de $\mathcal{C}$, con lo cual esta definición generaliza a la primera.

1.5. Proposición

Dada la sucesión asintótica $\{f_n\}_{n\in N}$ definida en C cuando $x \to x_o$, el desarrollo de una función f en el sentido generalizado es único.

Demostración

Reducción al absurdo.

Supongamos que existen dos desarrollos asintóticos de $f(x)$ en el sentido generalizado, es decir $f(x) \sim \sum c_i(x) f_i(x)$ y $f(x) \sim \sum \tilde{c}_i(x) f_i(x)$ cuando $x \to x_o$ y $x \in C$.

Para $i=o$ tenemos que $f(x) = c_o(x) f_o(x) + o(f_o(x))$, y $f(x) = \tilde{c}_o(x) f_o(x) + o(f_o(x))$, con c_o , $\tilde{c}_o \in \mathcal{C}$.

Restando queda $c_o(x)f_o(x) - \tilde{c}_o(x)f_o(x) = o(f_o(x))$ es decir $(c_o - \tilde{c}_o) f_o = o(f_o)$, ó , $c_o(x) - \tilde{c}_o(x) = o(1)$; pero la propiedad iii) de $\mathcal{C}$ se tiene que $c_o(x) - \tilde{c}_o(x) \in \mathcal{C}$ y por la propiedad ii) $c_o \equiv c_o$. Siguiendo el proceso para i=1,2,... m, siendo m el orden del desarrollo se tiene la unicidad .

1.6. Cuarta definición de desarrollo asintótico.

Sea f una función definida en un entorno de $x_o \in X$, (X espacio topológico Haussdorff), y sea $\mathcal{C}$

una escala asintótica para x_0. Se dice que f admite un desarrollo asintótico según la escala asintótica $\mathcal{E}$, hasta el orden φ, donde $\varphi \in \mathcal{E}$, si existe una familia de números reales $(\lambda_\psi)_{\psi \in \mathcal{E}}$ casi todos nulos, es decir todos nulos salvo un número finito de ellos, verificando que $f(x) = \sum_{\psi \in \mathcal{E}, \psi \geq \varphi} \lambda_\psi \psi(x) + o(\varphi)$.

1.7. Proposición

Si f admite un desarrollo asintótico según la escala asintótica $\mathcal{E}$, este es único.

Demostración

Reducción al absurdo.

Supongamos que $f = \sum \lambda'_\psi \psi(x) + o(\varphi) = \sum \lambda''_\psi \psi(x) + o(\varphi)$

luego $0 = \sum \lambda_\psi \psi(x) + o(\varphi)$, $\lambda_\psi = \lambda'_\psi - \lambda''_\psi$

con λ_ψ casi todos nulos.

Sea θ tal que $\psi \leq \theta$, $\forall \psi \in \mathcal{E}$ con $\lambda_\psi \neq 0$

$$-\lambda_\theta \theta(x) = \sum_{\psi \in \mathcal{E}, \theta > \psi \geq \varphi} \lambda_\psi \psi(x) + o(\varphi) = o(\theta)$$

lo cual es absurdo pues $\theta \in \mathcal{E}$ y seria nula en un entorno de x_0.

1.8. Análogamente a la primera definición de desarrollo asintótico, si dada f y la escala asintótica $\mathcal{E}$, $\theta \in \mathcal{E}$

es el mas grande de los $\psi \in \mathcal{E}$ tales que $\lambda_\psi \neq 0$, $\theta \geq \psi$ entonces la función $\lambda_\theta \theta(x)$ se llama parte principal de f en la escala asintótica $\mathcal{E}$ y f= $\lambda_\theta \theta + o(\theta)$.

Por la proposición antèrior si existe la parte principal de una función respecto a una escala asintótica $\mathcal{E}$, esta es única, aunque hay que tener en cuenta que la parte principal es única con respecto a una escala asintótica dada desde el principio. Así por ejemplo, ch x admite por parte principal la función $1/2\ e^x$ para el punto del infinito respecto de la escala $\mathcal{F}_1$. Sin embargo con respecto a la escala $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}} = (x^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ no tiene parte principàà.

Si f admite parte principal con respecto a una subescala de $\mathcal{E}$, f admite la misma parte principal con respecto a la escala asintótica $\mathcal{E}$.

<u>Proposición</u>.

Sea la función f que admite un desarrollo asintótico de orden φ según la escala $\mathcal{E}$, $f(x) = \sum_{\substack{\psi \in \mathcal{E} \\ \psi \geq \varphi}} \lambda_\psi \psi(x) + o(\varphi)$.

Entonces para cada $\xi > \varphi$, f admite un desarrollo asintótico de orden ξ , obtenido truncando el desarrollo dado en el término ξ , $f = \sum_{\psi \in \mathcal{E}, \varphi \geq \xi} \lambda_\psi \psi + o(\xi)$

La demostración es análoga a la realizada con desarrollos asintóticos según una sucesión asintótica.

2.- Funciones definidas por un desarrollo asintótico.

Sea f una función definida sobre un abierto C de un espacio topológico Hausdorff E, a valores en un espacio de Banach (M,!! !!). Esta misma función f puede tener dos desarrollos asintóticos diferentes, si cada uno de ellos está dado respecto a una sucesión asintótica distinta. Además las dos sucesiones asintóticas no tienen porque ser equivalentes .

2.1. Ejemplo

$f(x) = 1 / 1+x$, $x \in R$.

$1/1+x \sim \sum (-1)^{n-1} x^{-n}$ cuando x tiende a infinito.

$1/1+x \sim \sum (x-1)\, x^{-2n}$ " " " " "

$1/1+x \sim \sum (-1)^{n-1}(x^2-x +1)\, x^{-3n}$.

La primera es evidente cuando $!x! > 1$, y las otras dos se deducen de la primera. Estas tres series son convergentes cuando $|x|>1$. Pero no son equivalentes como series asintóticas. Sin embargo es frecuente encontrar funciones que tienen desarrollos convergentes y otros divergentes, ó viceversa. La transformación de desarrollos asintóticos divergentes en desarrollos asintóticos convergentes tiene un interés simplemente analítico. Trabajos de este tipo, y para la obtención de desarrollos asintóticos de fácil computación numérica, fueron realizados por Airey en 1.937, Van der Corput en 1.951, Miller en 1.952, Van Wijngaarden en 1.953 y Watson.

2.2. También es conveniente observar que un desarrollo asintótico no determina una única función. Basta tomar la función e^{-x} y ver que si queremos hacer $e^{-x} \sim \sum a_n x^{-n}$ cuando x tiende a infinito, es inmediato que $a_i = o$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces las funciones $1/1+x$ y $(1 + e^{-x})/1+x$ tienen el mismo desarrollo asintótico $\sum (-1)^{n-1} x^{-n}$ cuando x tiende a infinito para $x \in \mathbb{R}$, es decir si f(x) tiene un desarrollo asintótico con respecto a la sucesión asintótica $\{1/x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cuando x tiende a infinito, entonces $f(x) + e^{-x}$ tiene el mismo desarrollo asintótico. Es más, si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión asintótica para el punto del infinito, el teorema de Du Bois-Reymond nos asegura la existencia de una función $f(x)$ tal que $f = o(f_n)$ para todo n natural.

Así pues, dada una sucesión asintótica $\{f_n\}_{n \in N}$ cuando $x \to x_0$ en $C \subset E$, esta sucesión establece una relación de equivalencia entre las funciones definidas en C.

Definición

Sean f y g funciones definidas en $C \subset E$ abierto. Se dice que f y g son asintóticamente equivalentes, con respecto a $\{f_n\}_{n \in N}$ si, y sólo si $f(x) - g(x) = o(f_n(x))$ cuando x tiende a x_0 en C, para cada n de la sucesión.

En efecto es una relación de equivalencia:

i f es asintóticamente equivalente a f pues $f-f \equiv 0 = o(f_n)$.

i) Si f es asintóticamente equivalente a g, entonces $f-g= o(f_n)$ para cada n natural , $g-f=-(f-g)=o(f_n)$ luego g es asintóticamente equivalente a f.

i i) Si f es asintóticamente equivalente a g y g lo es a h

$$\left.\begin{array}{ll} f-g=o(f_n) & \forall n \in N \\ g-h=o(f_n) & \forall n \in N \end{array}\right\} f-h=o(f_n)+o(f_n)=o(f_n) \quad \forall n \in N$$

Por lo tanto una serie asintótica representa una clase de funciones asintóticamente equivalentes. A esta clase de funciones asintóticamente equivalentes la llamaremos " suma del desarrollo asintótico" , ó " suma de la serie asintótica".

2.3. Veamos ahora un resultado interesante que fué probado para series de potencias asintóticas por Van der Corput en 1.954, y para series asintóticas de funciones analíticas por Carleman en 1.926.

Proposición

Sea E un espacio topológico Hausdorff perfectamente normal (T_{5a}). Sean f_n , $n \in N$ funciones definidas sobre el abierto $C \subset E$, a valores en un espacio de Banach (M, !! !!).Y sea $\{f_n\}_{n \in N}$ una sucesión asintótica cuando $x \to x_0$. Dada la serie asintótica $\sum a_n f_n$, existe la suma asintótica de la serie.

Demostración:

Para probar esta proposición bastará construir un miembro de la clase de equivalencia de las funciones asintóticamente equivalentes.

En primer lugar consideramos una subsucesión de $\{f_n\}_{n\in N}$, tal que $a_n \neq 0$ para cada $n \in N$. Para evitar complicaciones de notación la seguimos llamando igual que a la sucesión.

Si $\sum a_n f_n$ es una serie finita $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_N f_N$ podemos tomar como representante de la clase la suma finita, en el sentido ordinario.

Si la serie es infinita $\sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n f_n$, por ser $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión asintótica cuando x tiende a x_0, se tiene $f_{n+1} = o(f_n)$ cuando $x \to x_0$ para cada $n \in N$. Por lo tanto podemos tomar un entorno de x_0, $U_n(x_0)$, para cada n, tal que $\bar{U}_n \subset U_{n-1}$ (*), por ser el espacio normal.

(*) y $\|a_{n+1} f_{n+1}(x)\| \leq \frac{1}{2} \|a_n f_n(x)\| \quad \forall x \in U_n \cap C$.

Para cada n, sea $g_n(x)$ una función continua tal que $0 \leq g_n(x) \leq 1$ en C, y $g_n(x) = 1$ para todo $x \in \bar{U}_{n+1}(x_0)$ $g_n(x) = 0$ para todo $x \in U_n^c(x_0)$. Esto lo podemos hacer por ser el espacio perfectamente normal.

Entonces se tiene que

$\|a_{n+p} g_{n+p}(x) f_{n+p}(x)\| \leq 2^{-p} \|a_n f_n(x)\|$, para todo $x \in U_n(x)$.

Sea $f(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} a_n g_n(x) f_n(x)$.

Evidentemente esta serie es convergente por la desigualdad anterior, y por lo tanto define una función en C . Veamos que $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ cuando $x \to x_o$.
Sea N fijo, y sea $x \in U_{N+1} \cap C$, entonces se tiene que $g_n(x) = 1$ para $n = 1,2,3,\dots N$, y $\| f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x) \| \leq$
$\leq \sum_{N+1}^{\infty} \| \varepsilon_n g_n(x) f_n(x) \| \leq \| a_{N+1} f_{N+1}(x) \| \sum_{N+1}^{\infty} 2^{N+1-n} =$
$= 2 \| \varepsilon_{N+1} f_{N+1}(x) \| = o(f_N(x))$.

2.4. Es conveniente hacer notar algunas propiedades interesantes de la suma asintótica de una serie asintótica dada.

a) Si para cada $n \in N$, f_n es continua, entonces f es continua en C.

b) Si el espacio E permite tomar para cada $n \in N$, g_n infinitamente diferenciable, y f_n es K veces diferenciable con $K \leq \infty$, se tiene que f es K veces diferenciable.

c) Carleman en 1.926 publicó un libro titulado "Las funciones quasi-analíticas", donde probó que en $\mathbb{C}$, y para series asintóticas de potencias, existe una única función f(x) que verifique

$$\left| \frac{f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x-x_0)^i}{(x-x_0)^n} \right| \leq \frac{A_n}{2}$$

donde las A_n son constantes que verifican que

$$\int_1^{\infty} \log \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{A_n^2} \right] \frac{dr}{r^2}$$ sea divergente.

Con lo cual conseguimos la unicidad del representante de la clase en un caso muy particular.

3.- Ejemplos .

Ahora que ya hemos visto las definiciones exactas de desarrollos asintóticos, vamos a ver unos ejemplos muy sencillos, y una interpretación intuitiva del desarrollo asintótico.

Así pues, una serie convergente se aproxima a la función cuando n tiende a infinito, para un valor de la variable dado, mientras que una serie asintótica se aproxima a la función cuando la variable tiende al punto de acumulación dado, para cada n fijo. Esto estrictamente no es cierto, como hemos visto, pero puede dar una interpretación muy intuitiva.

3.1. Ejemplo de Euler (1.754)

$$S(x) = 1 - 1!x + 2!x^2 - 3!x^3 + \ldots = \quad (-1)^n\, n!\, x^n .$$

Esta serie es divergente para todo $x \neq o$. Sin embargo, si x es suficientemente pequeño, por ejemplo 10^{-m}, $m \geq 2$, los términos de la serie cercanos al primero decrecen muy rápidamente, y se puede hallar un valor aproximado de $S(x)$. Euler consideró $f(x) = xS(x)$, con lo cual $f'(x) = 1! - 2!x + 3!x^2 + \ldots = (x-f(x))/x^2$, es decir $x^2 f'(x) + f(x) = x$, con lo que $f(x)$ puede ser obtenida como la solución de esta ecuación diferencial cerca de $x = 0$, y con $f(0) = 0$, y así se ha obtenido la suma de la serie asintótica.

3.2. Consideremos ahora la exponencial integral para valores reales positivos de x. $E_i(x) = \int_x^\infty e^{-t}/t \, dt$.
Se desea obtener una evaluación de $E_i(x)$ para grandes valores de x. Una serie convergente de potencias en $1/x$ no es posible, pues $E_i(x)$ no es analítica en el infinito.
Sin embargo, podemos integrar por partes obteniendo :
$$E_i(x) = e^{-x}/x - \int_x^\infty e^{-t}/t^2 dt = e^{-x}/x - e^{-x}/x^2 + 2\int_x^\infty e^{-t}/t^3 \, dt$$
y haciendo el proceso reiteradamente n veces obtenemos
$E_i(x) = S_n(x) + R_n(x)$, donde $S_n(x) = e^{-x}(1/x - 1/x^2 + 2!/x^3 + \ldots + (-1)^{n+1}(n-1)!/x^n)$, y $R_n(x) = (-1)^n n! \int_x^\infty e^{-t}/t^{n+1} dt$.
Para cada x fijo, los términos de $S_n(x)$ crecen cuando n crece. Pero por ser $E_i(x) = S_n(x) + R_n(x)$, R_n es preciso que también crezca. Sin embargo $R_n(x)$ satisface la inegualdad
$$|R_n(x)| \leq \frac{n!}{x^{n+1}} \int_x^\infty e^{-t} dt = e^x \, n! / x^{n+1} .$$

de lo que se sigue que, para n fijo, $R_n(x)$ es del orden de e^{-x}/x^{n+1} cuando x tiende a infinito. Así, para n fijo y x creciendo, $R_n(x)$ tiende a cero más rápidamente que el último término de $S_n(x)$. Por lo tanto, $S_n(x)$ dá una aproximación de $E_i(x)$ para un valor de x suficientemente grande.

Veamos ahora un ejemplo numérico de este desarrollo asintótico.

$x=10$, $n=4$ $\Longrightarrow$ $S_4(10) = 0{,}0914\ e^{-10}$.
$|R_4(10)| \leq 0{,}00024\ e^{-10}$, $|S_4(10) - E_i(10)| \leq 3\cdot 10^{-3} e^{-10}$.
Para x=100 obtenemos análogamente que
$|S_4(100) - E_i(100)| \leq 3\cdot 10^{-7}\ e^{-100}$.
Así $E_i(x)$ es aproximado por $S_4(x)$ cuando x tiende a infinito, y normalmente se escribirá $E_i(x) \sim S_4(x)$, ó lo que es igual $E_i(x) \sim e^{-x}(\ 1/x-1/x^2+2!/x^3-3!/x^4)$.
Otra alternativa de aproximación asintótica para $E_i(x)$ es dar un gran número de términos en $S_n(x)$. Por ejemplo $|R_8(x)| \leq e^{-x}\ 8!/x^9$, luego para x suficientemente grande S_8 dá una mejor aproximación de $E_i(x)$ que $S_4(x)$. Sin embargo para x pequeños, $S_8(x)$ dá una peor aprosimación que $S_4(x)$. Y se escribirá $E_i(x) \sim e^{-x}(\ 1/x-1/x^2+2!/x^3\ .\ .\ .\ )$.
Gracias a la forma especial de $R_n(x)$, en este caso, la magnitud del error es tan pequeña como el primer término

omitido. Generalmente este criterio no es aplicable.

3.3. Ejercicio.

Comprobar que las funciones sen px y cos px , cuando p y q son reales, pertenecen a $\mathcal{C}$, cuando x $\in$ R, para x tendiendo a infinito.

C A P I T U L O III

.- O P E R A C I O N E S C O N D E S A R R O L L O S A S I N T O T I C O S -.

1.- Combinación lineal, composición y sumación.

2.- Multiplicación, inversión y sustitución.

3.- Division.

4.- Integración.

5.- Derivación.

6.- Operaciónes con desarrollos asintóticos según escalas.

Introducción:

Se trata de establecer el mayor número posible de operaciones ciertas entre los desarrollos asintóticos para facilitar su estudio. Es decir, interesa saber en qué condiciones se puede operar con los desarrollos asintóticos para obtener un nuevo desarrollo asintótico de la función resultante.

Esto tiene una importancia efectiva dada la dificultad práctica de obtener un desarrollo asintótico de una función según una sucesión ó escala asintótica previamente dada; por lo que será conveniente poder relacionar la función en estudio con algunas cuyos desarrollos asintóticos son conocidos, para obtener su desarrollo por medio de relaciones con otros anteriormente obtenidos.

1.- Combinaciones lineales, composición y sumación .

Las funciones que trataremos en este capítulo estarán definidas sobre un conjunto abierto C de un espacio topológico E de Hausdorff, a valores en un espacio de Banach $(M, \|\ \|)$, y sus desarrollos asintóticos serán en un punto x_0 de acumulación de C.

1.1. Proposición

Si $f \sim \sum a_n f_n$ para $x \to x_0$ en C y $g \sim \sum b_n f_n$ para $x \to x_0$ en C, de órdenes K y P respectivamente, y si e y d son constantes, entonces $ef(x) + dg(x) \sim \sum (ea_n + db_n) f_n(x)$ para $x \to x_0$, de orden N $\min (K,P)$.

Demostración.

Basta aplicar la definición. Resulta también evidente que esta proposición es cierta para toda combinación lineal y finita.

1.2. Proposición

Sean $g_i \sim \sum a_{n,i} f_n(x)$, para $x \to x_0$ y de orden N, uniformemente en i, i= 1,2, . . . y a_i son constantes tales que $\sum a_i$ converge absolutamente, y además $A_n = \sum a_{n,i} a_i$ converge para cada n, entonces $\sum a_i \varphi_i$ converge en un entorno de x_0, y $F(x) = \sum a_i \varphi_i(x) \sim \sum A_n f_n(x)$ para $x \to x_0$, de orden N.

Demostración

$$\varphi_i - \sum_{n=1}^{N} a_{n,i} f_n = o(f_N) \quad \text{uniformemente en } i \ , \quad y$$

$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$, y por I.2.3. podemos escribir

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\varphi_i - \sum_{n=1}^{N} a_{n,i} f_n) = o(f_N)$ para $x \to x_0$ y la serie por lo tanto es convergente en un entorno de x_0 . Sumando ahora se obtiene lo que se queria siempre que $N < \infty$.

Si $N = \infty$, entonces $\sum A_n f_n$ es un desarrollo asintótico infinito de F(x) para $x \to x_0$.

1.3. Proposición.

Sean $\{f_n\}$ n=1,2, . .. $N < \infty$ y $\{g_m\}$ m=1,2,... $M < \infty$ dos sucesiones asintóticas para $x \to x_0$ en C, y sea $f_N = O(g_M)$. Si además $f \sim \sum a_n f_n$ de orden N para $x \to x_0$ en C, y para cada n se tiene $f_n \sim \sum b_{m,n} g_m$ de orden M, entonces $f \sim \sum_m c_m g_m$ de orden M, donde $c_m = \sum a_n b_{m,n}$.

Demostración

$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x) + o(f_N(x)) = \sum_{n=1}^{N} a_n (\sum_{m=1}^{M} b_{m,n} g_m(x) + o(g_M(x)) +$
$+ o(g_M(x)) = \sum_{m=1}^{M} c_m g_m(x) + o(g_M)$ gracias a I.2.6.

Si M es infinito, entonces $\sum c_m g_m$ es un desarrollo asintótico de f. Si $N = \infty$, entonces en la demostración necesitamos la extensión para series infinitas de la I.2.3. , con lo cual la proposición quedaría enunciada así :

Proposición.

Sean $\{f_n\}$, n=1,2, ... , y $\{g_m\}$ m=1,2,... $M \leq \infty$ dos sucesiones asintóticas , y se supone que para cada n existe un entero $\mu(n) \leq M$ tal que $\mu(n) \to M$ cuando $n \to \infty$, y $f_n = O(g_{\mu(n)})$. Si $f \sim \sum a_n f_n$, y $f_n \sim \sum b_{m,n} g_m$ de orden M, uniformemente en n, y $\sum a_n$ es absolutamente convergente, y la serie infinita $c_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_{m,n}$ es convergente para cada m, entonces $f \sim \sum c_m g_m$ de orden M para $x \to x_0$ en C.

2.- Multiplicación, inversión y sustitución .

2.1. Para la multiplicación ó producto de series asintóticas, los problemas son muy diferentes, pues en primer lugar el producto de dos desarrollos asintóticos no es un desarrollo asintótico en principio, ya que al multiplicar formalmente dos desarrollos $\sum a_n f_n$ y $\sum b_m f_m$ para $x \to x_o$ en C, los productos $\{f_n f_m\}$ no son, en general, una sucesión asintótica, y normalmente no es posible arreglar el sistema para que lo sea. Sin embargo existen algunas sucesiones asintóticas que tienen propiedades especiales con respecto al producto, es decir, en las que ampliando el sistema de sucesiones, ó simplemente por características especiales de su forma, son tales que al multiplicar dos desarrollos asintóticos abtenemos un nuevo desarrollo asintótico . Veamos primero un ejemplo, y luego unas proposiciones mas generales.

Proposición.

La multiplicación formal de dos desarrollos asintóticos en series de potencias (con $x_o = o$) es el desarrollo asintótico del producto.

Demostración

En este caso tenemos $f_n(x) = x^n$, luego el producto sigue siendo una potencia $x^n x^m = x^{n+m} = f_n(x) f_m(x) = f_{n+m}(x)$

Sea $f(x) \sim \sum a_n f_n(x)$ y $g(x) \sim \sum b_n f_n(x)$ para $x \to x_o$, siendo el orden M y P respectivamente, y se toma $N \leq \min(P,M)$

Sea $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ y $f_n(x) = x^n$.

$$\left.\begin{array}{l} f = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n + o(f_N) = F_N + o(f_N) \\ g = \sum_{n=1}^{N} b_m f_n + o(f_N) = G_N + o(f_N) \end{array}\right\} \text{ entonces}$$

$f \cdot g = F_N \cdot G_N + (f-F_N)G_N + f(g-G_N) + o(f_N)o(f_N)$.

$\lim_{x \to 0} (f(x)-F_N(x))G_N(x) / x^N = 0$ pues G_N está acotada para $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} f(x)(g(x)-G_N(x)) / x^N = 0$ pues $\lim_{x \to 0} f(x) = a_o \neq \pm\infty$

luego $f \cdot g = F_N G_N + o(f_N) + o(f_N) + o(f_N) = F_N \cdot G_N + o(f_N)$.

2.2. Proposición.

Sea $f \sim \sum a_n f_n$ con $f_n(x) = x^n$, $x_o = 0$, y $\lim_{x \to 0} f(x) = a_o \neq 0$. Entonces el desarrollo asintótico de $1/f$ es la inversión formal de la serie.

Demostración

Por ser $a_o \neq 0$ tomamos $b_o = a_o^{-1}$ y seguidamente hacemos $a_o b_1 + a_1 b_o = 0$ de donde obtenemos b_1 , y así sucesivamente se van obteniendo b_i , $i = 2,3,\ldots$ .Y ahora basta comprobar que $\sum_{n=0} b_n x^n \sim 1/f(x)$. Sea $g_n = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i$

$(1/f - g_n) = 1/f\ (1-fg_n) = 1/f\ (1-f_n g_n + g_n(f_n-f)) =$

$= o(x^n) = o(f_n)$.

2.3. Proposición.

Sean $\{f_n\}$ $n=1,2\ldots N$, $\{g_m\}$ $m=1,2,\ldots M$ y $\{h_k\}$ $k=1,2,\ldots K$, tres sucesiones asintóticas para $x\to x_o$ en C, y tales que verifican $f_1 g_M=O(h_K)$, $f_N g_1=O(h_K)$, y $f_n g_m \sim \sum c_{nmk}h_k$ de orden K para $x\to x_o$ en C. Si $f\sim\sum a_n f_n$ de orden N para $x\to x_o$ en C, y $g\sim\sum b_m g_m$ de orden M, para $x\to x_o$ en C, entonces $f\cdot g\sim\sum c_k h_k$ de orden K para $x\to x_o$ en C , donde $c_k = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_n b_m c_{nmk}$

Demostración

a) Si N,M y K son finitos se tiene que

$$f\cdot g = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n f_n + o(f_N)\right)\left(\sum_{m=1}^{M} b_m g_m + o(g_M)\right) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_n b_m f_n g_m +$$

$$+ o(f_1 g_M) + o(f_N g_1) = \sum_{k=1}^{K} c_k h_k + o(h_K) + o(f_1 g_M) + o(f_N g_1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} c_k h_k + o(h_K) .$$

b) Si $K=\infty$ y $f_1 g_M = O(h_k)$, $f_N g_1 = O(h_k)$ para cualquier k entonces podemos seguir la misma demostración de a).

c) Si M ó N son infinitos, hay que imponer como hipótesis suplementaria que la doble serie que define c_k sea convergente , y la demostración se haría eompletamente similar.

2.4. Definición

Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1,2,3,\ldots N}$ definidas sobre el abierto $C\subset E$, se dice que es una sucesión multiplicativa asintótica si, y sólo si $\{f_n\}_{n\in N}$ es una sucesión asintótica para $x\to x_0$ en C, tal que $f_1= O(1)$, y $f_n f_m \sim \sum c_{nmk} f_k$ de orden N, m,n=1,2,... N.

Proposición.

Si $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots N}$ es una sucesión multiplicativa asintótica para $x\to x_0$ en C, y $g_i \sim \sum a_{n,i} f_n$ de orden N, i=1,2,...K para $x\to x_0$, y $P(X_1,\ldots X_k)$ es un polinomio de variables $X_i \in M$, entonces $F(x)=P(f_1,f_2,\ldots f_K)$ posee un desarrollo asintótico $\sum A_n f_n$ de orden N, para $x\to x_0$ en C, donde los coeficientes An son los que se obtienen de la sustitución formal.

Demostración

Por ser una sucesión asintótica multiplicativa se tiene $f_1= O(1)$, luego

$\lim_{x\to x_0} \| f_1 f_N(x) / f_N(x)\| = \lim_{x\to x_0} \|f_1(x)\| \leq A$, es decir $f_1 f_N= O(f_N)$, ó lo que es lo mismo, se cumplen las hipótesis de 2.3., con lo que en el caso de un polinomio se reduce a repetir las operaciones un número finito de veces.

2.5. Proposición

Sea $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots N}$ una sucesión multiplicativa asintótica para $w \to w_0$ en C, tal que $f_1 = o(1)$ y $\|f_1(w)\|^H = O(f_N)(w)$ para $w \to w_0$, H fijo, entero y positivo. Si $f(z) \sim \sum c_n z^n$ de orden H, cuando $z \to 0$, y $z \in D \subset M$, siendo $(M, \| \ \|)$ el espacio vectorial de Banach con $f(z) : (M, \| \ \|) \longrightarrow (M, \| \ \|)$, y $z(w) \sim \sum a_n f_n(w)$ de orden N cuando $w \to w_0$ en C, entonces $F(w) = f(z(w))$ posee un desarrollo asintótico $\sum A_n f_n$ de orden N cuando $w \to w_0$ en C, y los coeficientes A_n estan obtenidos por sustitución formal.

Demostración.

Por ser $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots N}$ una sucesión asintótica multiplicativa, z^m posee un desarrollo asintótico para todo $m \leq H$, luego $(z(w))^m \sim \sum b_{m,n} f_n(w)$ de orden N , cuando $w \to w_0$ en C, y por ser $\|f_1\|^H = O(f_N)$ podemos aplicar 1.3. con lo que la proposición queda demostrada.

3.- División .

En esta sección se suponen las funciones a valores reales ó complejos, es decir $M = \emptyset$.

3.1. Si se tiene $f(x)= a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x) + o(f_N)$ cuando $x \to x_0$ en C, y $a_0 \neq 0$ se podría aplicar la misma técnica de 2.2. para probar que $1/ f(x)$ tiene un desarrollo asintótico de orden N cuando $x \to x_0$ en C, de la forma $\sum b_n f_n$, con $b_0=a_0^{-1}$, siempre que $\{f_n\}$ sea una sucesión multiplicativa asintótica y $f_1=o(1)$ cuando $x \to x_0$ en C, y además ha de existir $H \in N^+$ tal que $!!f_1!!^H= O(f_N)$ cuando $x \to x_0$, es decir cuando se cumplen las hipótesis de la proposición anterior. Y así podríamos extenderla para funciones racionales con el siguiente enunciado :

<u>Proposición</u>

Si $\{ f_n \}_{n=1,2,\ldots N}$ es una sucesión asintótica multiplicativa tal que $f_1= o(1)$ y $!!f_1!!^H= O(f_N)$ para algún H fijo cuando $x \to x_0$ en C, y $g_i(x) \sim \sum a_{n,i} f_n(x)$ de orden N, para $x \to x_0$, con $i=1,e,\ldots K$, y $P(z_1,z_2,\ldots z_K)$ una función racional de K-variables sobre el espacio complejo ($\emptyset$, ! !), a valores en este mismo espacio, y tal que el denominador de $P(z_1,z_2,\ldots z_K)$ no se anula para $z_1=z_2=\ldots=z_K=0$, entonces $F(x)= P(g_1(x),g_2(x)\ldots g_K(x))$ posee un desarrollo asintótico de la forma $A_0+ \sum A_n f_n$ de orden N, cuando $x \to x_0$, y los coeficientes son los obtenidos por sustitución formal.

Si $M \equiv \mathbb{C} \equiv E$, y $g(\zeta)$ es una función de variable compleja ζ , regular en un entorno de ζ_0, $U(\zeta_0)$, con $\zeta_0 = P(o,o,\dots o)$ y bajo las mismas condiciones del teorema anterior se puede asegurar la existencia del desarrollo asintótico para $g(P(z_1,z_2,\dots z_K))$. De esta manera se pueden justificar los desarrollos asintóticos de expresiones del tipo $e^{(P(g_1,g_2,\dots g_K))}$.

4.- Integración.

4.1. Proposición

Sean $(E,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida , E' un espacio de Hausdorff y $f(x,y)$ definida en $\Omega \subset E\times E'$, abierto, a valores en un espacio de Banach ($M, \|\ \|$) y $f(x,y) \sim \sum a_n(y) f_n(y)$, de orden N, uniformemente en $y, C\times D \subset \Omega$ y $D \subset E$ medible, con $\{f_n\}_{n=1,2,\dots N}$ una sucesión asintótica cuando $x \to x_0$ en C. Si $f(x,y)$ para cada x fijo, $x \in C$, y $a_n(y)$ para cada n fijo son funciones medibles de y , y $h(y)$ es una función integrable de y , y cada una de las integrales $A_n = \int_D h(y) a_n(y) d\mu$ existe, entonces la integral $F(x) = \int_D h(y) f(x,y) d\mu$ existe para cada x de un entorno de x_0, $U(x_0)$, y además $F(x) \sim \sum A_n f_n(x)$ de orden N.

Demostración

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{N} a_n(y)\ f_n(x) + o(f_N(x))$$

$$F(x) = \int_D h(y)f(x,y)d\mu = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\int_D h(y)a_n(y)d\mu +$$

$$+ \left(\int_D h(y)d\mu\right)(o(f_N(x))) = \sum_{i=1}^{N} A_n f_n(x) + o(f_N) .$$

4.2. Proposición.

Sea $E = \emptyset$, $C \subset E$ abierto y x_0 un punto de acumulación de C. Sea $\gamma(x)$ un camino diferenciable con continuidad a trozos de x a x_0. Sean $\{f_n(x)\}_{n\in N}$ una sucesión asintótica de funciones positivas sobre C, para $x \to x_0$, tales que existen las integrales $I_n(x) = \int_{\gamma(x)} f_n(z)dz$. Si $f(x) \sim \sum a_n f_n(x)$ de orden N, cuando $x \to x_0$ y f es una función medible sobre $\gamma(x)$, entonces $F(x) = \int_{\gamma(x)} f(z)dz$ existe en un entorno de x_0 y $F(x) \sim \sum a_n I_n(x)$ de orden N cuando $x \to x_0$.

Demostración

Por ser f_n, para todo n una función positiva se puede aplicar (I.4.6.) y $\{I_n(x)\}_{n\in N}$ es una sucesión asintótica para $x \to x_0$.

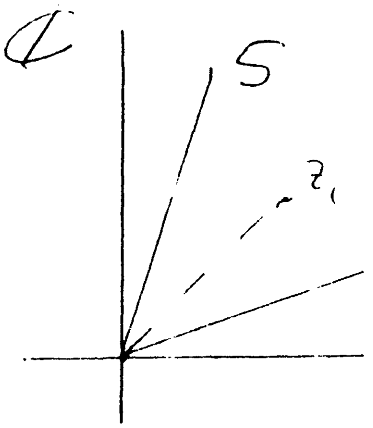
$$F(x)=\int_{\gamma(x)} f(z)dz = \int_{\gamma(x)}\left(\sum^{N} a_n f_n(z) + o(f_N(z))\right)dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_n \int_{\gamma(x)} f_n(z)dz + \int_{\gamma(x)} o(f_N(z))dz = \sum_{n=1}^{N} a_n\ I_n(x) + o(\ I_N(x)\ ).$$

4.3. Proposición

Sea f(z) una función compleja de variable compleja definida en un sector abierto S, y tal que $f(z) \sim \sum a_n z^n$ de orden N para $z \to 0$. Entonces $\int_0^{z_1} f(z)dz$, donde el camino de integración es una recta desde el orígen, tiene un desarrollo asintótico en serie de potencias de orden N+1.

Demostración



$$f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = o(z^N) \Leftrightarrow \forall z \in U_\varepsilon(0)$$

$$|f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n| < \varepsilon z^N$$

$$\left| \int_0^{z_1} f(z)dz - \sum_{n=0}^{N} a_n z^{n+1}/n+1 \right| \le$$

$$\le \int_0^{z_1} |f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n| \, |dz| \le \int_0^{z_1} \varepsilon |z|^N |dz| =$$

$$= o(z^{N+1}) \; .$$

4.4. Proposición.

Si f(z) es una función compleja de variable compleja en un sector S , y tiene derivada $f'(z) \sim \sum a_n z^n$ de orden N para $z \to 0$, entonces f(z) tiene un desarrollo asintótico que al diferenciar dá el desarrollo asintótico de f'(z) .

Demostración

Basta aplicar 4.3. a $f'(z)$.

4.5. Proposición.

Sea f una función compleja de variable compleja y $f(z) \sim \sum a_n/z^n$ de orden N cuando $z \to \infty$ en un sector S. Entonces $f(z) - a_0 - a_1/z$ es integrable y

$$F(z) = \int_z^{\infty} (f(w) - a_0 - a_1/w)\,dw \sim -(a_2/z + a_3/2z^2 + a_4/3z^3 + \dots)$$

de orden $N-2$ cuando $z \to \infty$.

Demostración

$$|f(z) - \sum^{N} a_n/z^n| < \varepsilon |1/z^N| \quad \forall z \in U \text{ entorno de } \infty \text{ en } S.$$

$$|F(z) + \sum_{n=1}^{N-2} a_{n+1}/nz^n| = \left|\int_z^{\infty} (f(w) - a_0 - a_1/w - a_2/w^2 - \dots - a_{N-1}/w^{N-1})\,dw\right| \le \int_z^{\infty} |f(w) - a_0 - a_1/w - a_2/w^2 - \dots - a_{N-1}/w^{N-1}||dw|$$
$$< \int_z^{\infty} \varepsilon_1 |1/z^{N-1}||dw| = o(1/z^{N-2}) .$$

Proposición

Si f es una función compleja de variable compleja y $f(z) \sim \sum_{n=2}^{N} a_n/z^n$ de orden N para $z \to \infty$ y f es diferenciable y f' tiene un desarrollo asintótico en serie de potencias, entonces el desarrollo asintótico de f' es la derivada del desarrollo asintótico en serie de potencias de $f(z)$.

Demostración

Basta aplicar la anterior proposición.

5.- Derivación.

5.1. La derivación no es posible en general. La derivada de un desarrollo asintótico no es el desarrollo asintótico de la derivada, salvo en casos excepcionales en los que se pueda aplicar algún teorema sobre integración, de los vistos hasta ahora. Como contraejemplo basta tomar $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(e^{x^2})$, para $x_0 = +\infty$, $x \in R$. Evidentemente f tiene un desarrollo en serie de potencias idénticamente nulo. Sin embargo su derivada $f'(x) = e^{-x}(e^{x^2} 2x \cos(e^{x^2}) - \operatorname{sen}(e^{x^2}))$ no tiene límite cero en el infinito y por lo tanto no tiene desarrollo asintótico en el infinito en serie de potencias.

6.- Operaciones con desarrollos asintóticos según escalas asintóticas.

6.1. Proposición

Si las funciones f_1, f_2, (definidas como en II.1.6.)

admiten desarrollos asintóticos hasta el orden φ , según la escala $\mathcal{G}$, $f_i = \sum_{\psi \in \mathcal{G}, \psi \geq \varphi} \lambda_\psi^i \psi + o(\varphi)$ $i=1,2$. entonces la suma $f_1 + f_2$ admite el desarrollo asintótico según la escala $\mathcal{G}$ hasta el orden φ , que resulta de la suma formal . $f_1 + f_2 = \sum_{\psi \in \mathcal{G}, \psi \geq \varphi} (\lambda_\psi^1 + \lambda_\psi^2)\psi + o(\varphi)$.

Para demostrar esta proposición basta aplicar la defininión.

6.2. Definición

La escala asintótica $\mathcal{G}$ se dice estable para el producto si para cada par de funciones f, g $\in \mathcal{G}$ se tiene que fg $\in \mathcal{G}$.

Proposición.

Si $\mathcal{G}$ es una escala estable para el producto, f_1 y f_2 son funciones acotadas que admiten un desarrollo asintótico hasta el orden φ, según la escala asintótica $\mathcal{G}$ $f_i = \sum_{\psi \in \mathcal{G}, \psi \geq \varphi} \lambda_\psi^i \psi + o(\varphi)$, entonces el producto $f_1 f_2$ admite un desarrollo asintótico hasta el orden φ de la forma $f_1 f_2 = \sum_{\psi \in \mathcal{G}, \psi_i \geq \varphi,\ i=1,2} \lambda_{\psi_1}^1 \lambda_{\psi_2}^2 \psi_1 \psi_2 + o(\varphi)$.

La demostración es muy sencilla teniendo en cuenta que las funciones están acotadas, lo que implica que las funciones de la escala que entran a formar parte de sus desarrollos están acotadas .

6.3. Proposición.

Si f_1 , f_2 son funciones que admiten respectivamente a $\lambda_1\theta_1$ y $\lambda_2\theta_2$ como partes principales según la escala asintótica $\mathcal{E}$, entonces se verifica que :

a) Si $\theta_1 < \theta_2$ entonces la suma $f_1 + f_2$ admite a $\lambda_2\theta_2$ como parte principal según la escla asintótica $\mathcal{E}$.

b) Si $\theta_1 = \theta_2$ y si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, la suma $f_1 + f_2$ admite a $(\lambda_1 + \lambda_2)\theta_1$ como parte principal según la escala asintótica $\mathcal{E}$.

c) Si la escala asintótica $\mathcal{E}$ es estable para el producto, el producto $f_1 f_2$ admite $\lambda_1\lambda_2\theta_1\theta_2$ como parte principal según la escala $\mathcal{E}$.

Demostración :

a) Como $\theta_1 < \theta_2 \Rightarrow \theta_1 = o(\theta_2)$ $f_1 + f_2 = \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + o(\theta_1) + o(\theta_2)$
$= \lambda_1 o(\theta_2) + \lambda_2\theta_2 + o(o(\theta_2)) + o(\theta_2) = \lambda_2\theta_2 + o(\theta_2)$

b) Análogo .

c) $f_1 f_2 = \lambda_1\lambda_2\theta_1\theta_2 + o(\theta_1)o(\theta_2) + \lambda_1\theta_1 o(\theta_2) + \lambda_2\theta_2 o(\theta_1)$
$= \lambda_1\lambda_2\theta_1\theta_2 + o(\theta_1\theta_2)$.

6.4. Proposición.

Sea $\mathcal{G}$ una escala asintótica estable para el producto, para el punto $x_0 \in X$. Sea f una función a valores reales, definida en un entorno de x_0, que admite un desarrollo asintótico según la escala $\mathcal{G}$ hasta el orden φ.
$f = \sum_{\psi \in \mathcal{G}, \psi \geq \varphi} \lambda_\psi \psi + o(\varphi)$, con $f = O(\theta)$, $\theta \in \mathcal{G}$ y $\theta = o(1)$.
Sea g una función continua en el origen (función real de variable real), admitiendo en un entorno del origen un desarrollo en serie de potencias de la forma
$g(u) = a_0 + a_1 u + \ldots + a_n u^n + O(u^{n+1})$. Si las funciones φ, θ verifican $\theta^{n+1} < \varphi < \theta^{-n}$, entonces gof admite un desarrollo asintótico hasta el orden φ , según la escala $\mathcal{G}$, y este desarrollo es el obtenido haciendo la suma de los términos mayores ó iguales a φ , en la expresión $a_0 + a_1 R + \ldots + a_n R^n$, con $R = \sum_{\psi \in \mathcal{G}, \psi \geq \varphi} \lambda_\psi \psi$

Demostración

De la relación $f = O(\theta)$ se obtiene que $O(f^{n+1}) \subset O(\theta^{n+1})$ luego $gof = a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n +$
$+ O(\theta^{n+1}) = a_0 + a_1 f + \ldots + a_n f^n + o(\varphi)$, ya que $\theta^{n+1} < \varphi$
Pero teniendo en cuenta 6.2, cada f^k admite un desarrollo asintótico hasta el orden φ , según la escala $\mathcal{G}$, y por la unicidad del desarrollo la proposición queda demostrada.

CAPITULO IV

.- OBTENCION DE DESARROLLOS ASINTOTICOS PARA INTEGRALES .-

1.- Método de integración por partes .

2.- Integrales indefinidas.

3.- Otros métodos.

Introducción:

Este capítulo trata de dar algunas reglas prácticas, para la obtención de desarrollos asintóticos en casos muy concretos de funciones definidas por integrales . El problema resulta mas complicado en la práctica, pues generalmente el dato es una simple función y la solución un desarrollo asintótico de esta función, pero sin hablar para nada, en un principio, de sucesión ó escala asintótica. Es decir, la elección de una u otra escala asintótica va a venir determinada por la misma función de la que se quiere hallar su desarrollo. Por este motivo es conveniente tener ya un grupo de escalas asintóticas posibles, estudiadas anteriormente (este es el interés de los ejemplos en los capítulos anteriores), para poder elegir una de ellas , ó tener algún punto de partida para alguna nueva.

1.- Método de integración por partes .

Sean $g(t,x)=g(t)$, $h(t,x)=h(t)$ dos funciones reales , con t ,x reales .

1.1. Se trata de hallar un desarrollo asintótico de $f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)h(t)dt$ integrando por partes .

Para una función cualquiera f(t), denotemos la derivada m-ésima y la integral m-ésima por

$$\frac{d^m f}{dt^m} = f_m \, , \quad f_o = f \, , \quad \frac{df_{-m}}{dt} = f_{-m+1}$$

Hay que hacer constar que f_{-m} contiene m constantes, una por cada integración, lo cual dá la oportunidad de la elección de las constantes mas conveniente en cada casol Así pues , integrando por partes queda ;

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)h(t)dt = \sum_{n=0}^{N-1} S_n + R_N \text{ , donde}$$

$$S_n = (-1)^n (g_n(\beta)h_{-n-1}(\beta) - g_n(\alpha)h_{-n-1}(\alpha)) \text{ , y}$$

$$Rn = (-1)^n \int_{\alpha}^{\beta} g_n(t)h_{-n}(t)dt \text{ .}$$

Si (α, β) es un intervalo finito, para que estas manipulaciones sean válidas basta que g sea N veces continuamente diferenciable y que h sea integrable.

Si (α,β) es un intervalo infinito, es suficiente que todas las integrales, y los límites $\lim_{t\to\alpha} g_n(t)h_{-n-1}(t)$ y $\lim_{t\to\beta} g_n(t)h_{-n-1}(t)$ existan .

Si g es N+1 veces continuamente diferenciable podemos integrar de nuevo, y nos queda $R_N= S_N + R_{N+1}$, lo que nos va a permitir comparar el resto R_N con el primer término omitido . Las siguientes proposiciones, establecen relaciones de este tipo.

1.2. Proposición

Si g y h son reales, y $g_N h_{-N}$ y $g_{N+1}h_{-N-1}$ tienen signos constantes, e iguales para $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, entonces R_N tiene el mismo signo que S_N , y $|R_N|\leqslant|S_N|$

Demostración

$$R_n= (-1)^n\int_\alpha^\beta g_n(t)h_{-n}(t)dt,$$ luego

sig $R_N\neq$ sig R_{N+1} y como $R_N= S_N+ R_{N+1}$ entonces

sig R_N = sig S_N , es decir $|R_N|= |\,|S_N| - |R_{N+1}|\,|$

i) Si $R_N>0$ entonces $S_N>0$ y $R_{N+1}<0$

luego $R_N= S_N- (- R_{N+1}) < S_N \Rightarrow |R_N|\leqslant|S_N|$

ii) Si $R_N<0$ entonces $S_N<0$ y $R_{N+1}>0$

$-R_N = -S_N- R_{N+1} \Rightarrow |R_N|\leqslant|S_N|$

1.3. <u>Proposición</u>

Si g es real, y $|h_{-N-1}|$ es una función creciente de t, y g_N, g_{N+1} tienen signo constante e igual para $\alpha \leq t \leq \beta$, ó si $|h_{-N-1}|$ es una función decreciente de t, y g_N, g_{N+1} tienen signo constante y opuesto para $\alpha \leq t \leq \beta$, entonces $|R_N| \leq 2|S_N|$.

Demostración

i) $|h_{-N-1}|$ es una función creciente de t.

$|h_{-N-1}(t)| \leq |h_{-N-1}(t+h)|$, $h > 0$, suponemos g_N, $g_{N+1} > 0$

$$R_{N+1} = (-1)^{N+1} \int_{\alpha}^{\beta} g_{N+1}(t) h_{-N-1}(t) dt .$$

$$|R_{N+1}| \leq |h_{-N-1}(\beta)(g_N(\beta) - g_N(\alpha))| \leq |h_{-N-1}(\beta) \cdot g_N(\beta)| -$$

$$- |h_{-N-1}(\beta) g_N(\alpha)| \leq |h_{-N+1}(\beta) g_N(\beta)| - |h_{-N-1}(\alpha) g_N(\alpha)| \leq$$

$$\leq |S_N| \Longrightarrow |R_{N+1}| \leq |S_N| \Longrightarrow |R_N| \leq 2|S_N| .$$

Análogamente se hace para g_N, $g_{N+1} < 0$, cambiando por $-g_N$, $-g_{N+1}$.

ii) Si $|h_{-N-1}|$ decrece se cambia en i), t por $-t$.

2.- <u>Integrales indefinidas</u> .

2.1. Sea f una función de variable real a valores complejos y consideraremos $x_0 = \infty$. Se van a estudiar algunos casos en los que $f \sim cg$, donde g pertenece a una

amplia clase de funciones del tipo $g = x^{\gamma}(Lx)^{\beta}e^{P(x)}$,
funciones de Dieudonné, donde $g \neq 0$, diferenciable y
$g'/g \sim \beta/xLx + \alpha/x + P'(x)$, donde $P(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x^{\gamma_i}$ con
$\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_k > 0$ y $\alpha, \beta, c_i \in \mathbb{R}$.
Para dar una aporximación de g'/g vamos a utilizar las dos siguientes identidades evidentes :

$g = d/dt\ (\ tg(t)) - t\ g'(t)$. (a)

Si $h = g / g'$ $\Longrightarrow$ $g = d/dt\ (gh) - gh'$ (b)

Una aproximación (parte principal ó representación asintótica) sería el pirmer término de un desarrollo asintótico cuando tuviesesmos la escala asintótica definida desde el principio, es decir, cuando se trata de hallar el desarrollo asintótico de una función en un punto, hemos de referirnos, según la definción, a una escala ó sucesión asintótica dada. Sin embargo , lo que ocuprre, en general, cuando se desea hallar el desarrollo asintótico de una función, es que la escala asintótica se va creando al mismo tiempo que se obtiene el desarrollo asintótico, es decir, vamos obteniendo aproximaciones sucesivas, y se comprueba después que efectivamente forman parte de una escala, lo único que tenemos dado desde el principio es una clase de funciones muy amplia, en este caso la clase de funciones de Dieudonné, la cual actua como proveedora de las posibles funciones que van a formar parte de la escala asintótica en cada caso. Lo que se hace no es mas que aplicar el teorema de Mackie una vez obtenidos los límites, y por consiguiente las funciones de la escala.

2.2. Proposición

Sea $g'/g \sim \mu/x$, $\mu \in R$.

i) Si $\mu > -1$ entonces $x^{\mu-\varepsilon} = O(g)$ para todo $\varepsilon > o$ y $\varepsilon \to o$, cuando $x \to \infty$ y además $\int_0^x g(t)dt \sim xg(x)/\mu+1$.

ii) Si $\mu < -1$ entonces $g = O(x^{\mu+\varepsilon})$ para todo $\varepsilon > o$, cuando $x \to \infty$ y $\int_x^\infty g(t)dt \sim -xg(x)/\mu+1$

Demostración

i) Podemos aplicar I.2.4. e integrando obtenemos

$g'(x)/g(x) \sim \mu/x$ luego $Lg(x) \sim \mu Lx$.

Para cada $\varepsilon > o$, y x suficientemente grande

$Lg(x) \geq (\mu-\varepsilon)Lx \Longrightarrow g(x) \geq x^{\mu-\varepsilon}$ con $\varepsilon \to 0$

Utilizando la identidad (a) queda

$\int_0^x g(t)dt = xg(x) - og(o) - \int_0^x tg'(t)dt$, ó lo que es lo mismo $\int_0^x (g(t) + tg'(t))\,dt = xg(x)$, pero $g'/g \sim \mu/x$

$\Longrightarrow xg'(x) \sim \mu\, g(x)$ con lo que podemos volver a aplicar I.2.4. y $\int_0^x (g(t)+tg'(t))dt \sim (\mu+1)\int_0^x g(t)dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^x g(t)dt \sim xg(x)/\mu+1$

ii) Análogamente al caso anterior $Lg(x) \sim \mu Lx$, y para todo $\varepsilon > 0$ $Lg(x) \leq (\mu+\varepsilon)Lx \Leftrightarrow g(x) \leq x^{\mu+\varepsilon}$

Aplicando de nuevo la identidad (a), tenemos $\int_x^\infty g(t)dt = -xg(x) - \int_x^\infty tg'(t)dt$ y análogamente $\int_x^\infty g(t)dt \sim -xg(x)/\mu+1$.

2.3. Proposición

Sea $g'(x)/g(x) = o(1/x)$, entonces $\int_0^x g(t)dt \sim xg(x)$ cuando $x \to \infty$.

Demostración

Aplicando I.2.4. a g'/g tenemos $Lg(x)=o(Lx) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Para cada $\varepsilon > 0$, y $x \geq M$ $|Lg(x)| < \varepsilon Lx \Rightarrow$

$\Rightarrow Lx \geq -Lg(x) \Rightarrow g > x^{-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$.

Utilizando la identidad (a) $\int_0^x (g(t)+tg'(t))dt = xg(x)$

Pero por hipótesis $tg'(t) = o(g)$, luego $\int_0^x g(t)dt \sim xg(x)$ cuando $x \to \infty$.

2.4. Proposición

Sea $g/g'=h$, y $h'(x) = o(1)$ para $x \to \infty$.

i) Si $g' > 0$ en un entorno de infinito, entonces

$$\int^{\infty} g(t)\,dt = \infty \quad \text{y} \quad \int^{x} g(t)\,dt \sim (g(x))^2/g'(x) .$$

ii) Si $g' < 0$ en un entorno de infinito se tiene que

$$\int^{\infty} g(t)\,dt < \infty \quad \text{y} \quad \int_{x}^{\infty} g(t)\,dt \sim - (g(x))^2/ g'(x) .$$

Demostración

i) Aplicando I.2.4. se tiene que $h(x) = o(x)$ pues $h'(x)=o(x)$, luego $1/x = o(g'/g) \Rightarrow Lx=o(Lg(x))$.

Para cada $\varepsilon > 0$ $Lx < \varepsilon\, Lg(x)$ con $x > M$, y $g > x^{\alpha}$, con $\alpha > 0$, lo cual prueba que $\int^{\infty} g(t)\,dt = \infty$.

Utilizando la identidad (b) $\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x h(t)g'(t)\,dt =$

$= h(x)g(x) - h(0)g(0) - \int_0^x h'(t)g(t)\,dt$ con lo cual

$\int_0^x (1+ h'(t))g(t)\,dt = h(x)g(x) - h(0)g(0)$. Pero $h'=o(1)$

$\Rightarrow (1+h')g \sim g$, y por I.2.4. tenemos

$$\int^x g(t)\,dt \sim h(x)g(x) = (g(x))^2/ g'(x) .$$

ii) Por ser $g' < 0$ análogamente al caso anterior para cada $\varepsilon > 0$, $Lx < \varepsilon |Lg(x)| \Rightarrow -1/\varepsilon\; Lx > Lg(x)$ con x suficientemente grande, luego $g < x^{-\alpha}$ para todo $\alpha > 0$ luego $\int^{\infty} g(t)\,dt < \infty$, y aplicando de nuevo I.2.4. y la identidad (b) tenemos $\int_x^{\infty} (1+h'(t))g(t)\,dt = - h(x)g(x)$ y siguiendo el proceso anterior se sigue lo que se quería.

2.5.

2.5. Así pues se han obtenido los primeros términos del desarrollo asintótico en el infinito de funciones definidas por integrales indefinidas, pero este mismo procedimiento puede ser válido para obtenerl términos sucesivos volviendo a aplicar el resultado varias veces. Por ejemplo, en el primer caso de la primera proposición se tiene que

$$g'(x)/g(x) \sim \mu/x \quad , \mu > -1 \quad , \text{ con lo cual}$$

$$\int_a^x g(1+ tg'(t)/g(t)) \, dt = xg(x) - ag(a) \,.$$

$$\int_a^x g(1+\mu)dt + \int_a^x g\,(tg'(t)/g(t) - \mu)dt = xg(x)-ag(a)$$

$$\Rightarrow \int_a^x g(t)dt = (xg(x) - ag(a))/ (1+\mu) - \int_a^x (tg'(t) -$$

$- \mu g(t))/ (\mu+1) \; dt$. LLamando $g_1(t)= (tg'(t) -$
$- \mu g(t)) / (\mu + 1)$, se puede volver a aplicar el proceso a la nueva $g_1(t)$ e incluso si $\int^{\infty} g_1(t)dt < \infty$, podemos subdividir el problema tomando $\int_a^x g_1(t)dt = \int_a^{\infty} g_1(t) -$
$- \int_x^{\infty} g_1(t)dt$.

2.6. En el caso de integrales de la forma $\int_a^{\infty} g(t,x)dt$, y $\int_a^x g(t,x)dt$ cuando $x \to \infty$ hay que tener mas cuidado, pero se pueden estudiar de forma parecida .

3.- <u>Otros métodos</u> -.

Siempre que se trate de encontrar desarrollos asintóticos de funciones definidas por una integral, será conveniente relacionar la integral dada con alguna transformación integral, de la que sepamos a priori que podemos obtener el desarrollo asintótico ó bien la representación asintótica buscada, para poder después, volviendo a aplicar la misma transformación, obtener el segundo término del desarrollo y así sucesivamente.

Como no es el objetivo de este trabajo, me limitaré a hacer una relación de transformaciones de este tipo, con alguna bibliografía.

1. Transformación de Laplace. Lemas de Watson. Generalizaciones.
2. Transformación de Fourier.
3. Fórmula de Kelvin y su generalización.
4. Método del descenso rápido ó método del puerto. Aplicación a la integral de Airey . Fórmula del punto de silla.
5. Método de la fase estacionaria.
6. Integrales multidimensionales con varios parámetros.

Bibliografía:

- Techniques of Asymptotic Analysis. L.Sirovich. Springer.

- Asymptotic expansions . A.Erdelyi. Dover Publications.I.

- Asymptotic Analysis. J.D. Murray. Oxford University Press.

- Matemáticas para físicos.

- Copson.Asymptotic expansions. Cambridge University Press.

C A P I T U L O V

- S O L U C I O N E S A S I N T O T I C A S P A R A E C U A C I O N E S D I F E - R E N C I A L E S O R D I N A R I A S D E S E G U N D O O R D E N - .

1.- Clasificación .

2.- Soluciones normales.

Introducción:

Se trata de obtener soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden, en el entorno de un punto, cuyos coeficientes no son analíticos en dicho punto. Generalmente se podrá precisar la existencia de estas soluciones, pero no una forma explícita de ellas. En este caso se tratará de aproximar estas soluciones por medio de sus desarrollos asintóticos. En la práctica se suele seguir el proceso inverso; es decir en primer lugar, se busca un tipo de serie que puede satisfacer la ecuación diferencial, desde un punto de vista puramente formal, y después se procede a la comprobación analítica de la existencia de la solución, verificando que efectivamente la serie buscada es el desarrollo asintótico de la solución, cuya existencia se ha probado.

1.- Clasificación .

Se trata de investigar el comportamiento asintótico de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden, del tipo $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ cuando $x \to x_0$. Se supone que $x \in \emptyset$ en una región abierta R, x_0 es un punto de acumulación de R, y las funciones p,q y f son complejas. Evidentemente, las posibles soluciones de la ecuación diferencial van a depender del comportamiento de los coeficientes p y q en el punto x_0.

Por esta razón, principiemos haciendo una clasificación de las ecuaciones diferenciales de orden cualquiera, lineales homogéneas, según el comportamiento de los coeficientes en el entorno del punto x_0. Sea la ecuación diferencial de orden n (1) $\sum_{i=0}^{m} f_i(x)y^{i)} = 0$, donde en un entorno del punto x_0, las f_i son funciones complejas con $f_n(x) \neq 0$ y $f_0(x) \neq 0$.

Si las f_i fuesen meromorfas, multiplicando la ecuación por una potencia conveniente $(x-x_0)^m$, con m entero, se puede conseguir que todas las f_i sean analíticas en elppunto x_o, pero no todas nulas para $x = x_o$. Es decir, podemos considerar $f_i(x) = (x-x_o)^{\alpha_i} h_i(x)$, donde $\alpha_i \geqslant 0$ es un número entero positivo, $h_i(x_o) \neq 0$, y $h_i(x)$ desarrollable en serie de potencias de $(x-x_o)$, con $h_i(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^i (x-x_o)^m$, y $a_o^i = h_i(x_o)$, siendo convergente la serie en un entorno de x_o. Supongamos en relación con las definiciones siguiente, que hemos efectuado la multiplicación conveniente en el caso de que sean funciones meromorfas.

1.1. Definición

Se dice que x_o es un punto regular de la ecuación diferencial si es $f_n(x_o) \neq 0$ y las fi son todas funciones meromorfas. Se dice que x_o es un punto singular si $f_n(x_o) = o$.

1.2. Definición

Se dice que x_o es singular regular si la ecuación (1) puede escribirse en la forma

(2) $\sum_{i=0}^{m} (x-x_o)^i h_i(x) y^{i)} = 0$, donde h_i son

funciones analíticas en x_o y $h_n(x_o) \neq 0$.

1.3. En el caso de que el punto x_o no verifique ninguna de las definiciones anteriores, se dice que x_o es una singularidad irregular. Si en el caso de la singularidad irregular las funciones f_i son meromorfas, se dice que x_o es una singularidad irregular de rango finito.

Cuando x_o es el punto del infinito, entonces se hace el camibo $x'=1/x$ y se clasifica la ecuación diferencial resultante para el punto $x'_o = o$. Así, por ejemplo, el punto del infinito será singularidad regular cuando se pueda escribir la ecuación diferencial en la forma $\sum_{i=0}^{n} (1/x')^i h_i(x') \, y^{i)} = 0$, donde $h_i(x')$ son funciones analíticas para x' en el punto $x'_o=0$, es decir $\sum_{i=0}^{n} x^i h_i(1/x) \, y^{i)} = 0$.

2.- <u>Soluciones normales</u> .

211. En el caso de que sea x_o un punto regular, entonces $f_n(x) = h_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^n (x-x_o)^m$ y $\alpha_n = 0$, todas las f_i son analíticas, luego para cada conjunto de va-

lores $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \not{C}^n$, existe una única solución analítica de la ecuación (1), de forma que $y(x_0)= y_0$, $y'(x_0)=y_1$, . . ., $y^{n-1)}(x_0)= y_{n-1}$, por el teorema clásico de existencia y unicidad .

Ahora, se trata de encontrar ó apróximar esta solución que ya sabemos que existe. Además el mismo teorema asegura la analiticidad de la solución, y el método más idóneo sería dar su desarrollo en serie de potencias, para lo que se pueden seguir dos caminos. El primero consistirá en construir su serie de Taylor $y = \sum_{i=0}^{\infty} y^{i)}(x_0)\ (x-x_0)^i / i!$, alrededor del punto x_0, para lo que basta despejar $y^{n)}$ de la ecuación diferencial, y seguir derivando para obtener las derivadas sucesivas. El segundo camino sería dar la serie $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(x-x_0)^i$ y determinar los coeficientes c_i, obligando a esta serie a verificar la ecuación diferencial e identificando coeficientes.

2.2. Al tratar de bubcar soluciones cuando x_0 es un punto singular regular ya no se tiene la seguridad de la existencia de una solución analítica en x_0. Sin embargo se puede intentar buscar soluciones en forma de series de potencias de la forma $y=(x-x_0)^r \sum_{k\geq 0} c_k(x-x_0)^k$ con $c_0 \neq 0$, donde r no es necesariamente un número entero. Precisamente cuando no lo sea, se considerará que $(x-x_0)^r$ indica alguna de las ramas de esta función potencial que estan definidas en el plamo complejo , con un corte a lo largo de una semirecta con origen en x_0.

Al obligar que esta serie satisgaga la ecuación diferencial (2), se ha de anular el coeficiente del término de menor orden $F(r) = \sum_{i=0}^{m} \binom{r}{i} i!\, h_i(x_0)$.
A $F(r) = 0$ se denomina ecuación característica de la ecuación diferencial en el punto x_0, y a cada solución r, exponente característico.

Para este caso hay dos posibles métodos de solución . En el primer método se toma una solución r de la ecuación característica y se forma la serie $y = (x-x_0)^r \sum_{k\geq 0}^{m} c_k(x-x_0)^k$. Sustituyendo esta serie en la ecuación diferencial (2), se han de anular los coeficientes de la variable x, obteniéndose las condiciones $\sum_{k\geq 0}^{\mu} c_k \sum_{i=0}^{m} \binom{r+k}{i} i!\, a^i_{\mu-k} = 0$

Se toma un $c_o \neq o$ cualquiera, y se obtienen por recurrencia los c_k, siempre que la ecuación ca - racterística no tenga otras raices que difieran de r en números enteros. En este caso se obtendrían tantas soluciones como expomentes característicos. Si

Si la ecuación característica tienen raices que se diferencian en números enteros, se pueden cal- calcular efectivamente los c_k, si se toma una raiz r para la cual ninguna de las $r+1$, $r+2$, . . . ,es raiz de la ecuación característica .(Si las raices son reales, una raiz adecuada es la mayor. Si son complejas no se puede hablar de mayor.). Así se obtienen los coeficientes c_k, y la serie correspondiente, que converge en todo círculo, donde todas las h_i sean regulares y $h_n \neq o$, y representa una solución de la ecuación diferencial, en el círculo, con un corte a partir de x_o.

Si existen varios exponentes característicos tales como r_1, r_2, . . . r_m que se diferencian en números enteros, a partir de la solución encontrada se puede rebajar el orden de la ecuación diferencial, y entonces se puede volver a aplicar el método expuesto.

Si se pueden ordenar las raices de manera que sea $r_1-r_2 \not< 0$, . .. $r_{m-1}-r_m \geqslant 0$, por el método indicado se obtiene un sistema de soluciones linealmente independientes, de la forma

$$y_j = \sum_{k=1}^{j} (x-x_0)^{r_k} \varphi_{j,j-k}(x) \log^{j-k}(x-x_0)$$

donde las funciones φ son regulares en x_0.

El segundo método, también llamado método de Frobenius, se distingue del anterior, en que la serie $y=(x-x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ no se forma inicialmente con los valores para r deducidos de la ecuación característica, si no que se le hace depender de r y se la deriva con respecto al parámetro r, pero el estudio es análogo y no se verá aquí.

2.3. El caso de singularidades irregulares es completamente diferente. Sería lógico pensar que, al igual que en el caso de singularidad regular, donde las f_i tienen polos, y la solución se obtenía multiplicando por una potencia finita de $(x-x_0)$, si las f_i tuviesen singularidades esenciales, se podría intentar una so-

lución , que para $x_0 = \infty$, tuviera la forma $y=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x^{-k-\rho}$
El problema ahora es que para los c_k obtenemos un sistema infinito de ecuaciones que no pueden ser resueltas por recu rencia, y para ρ una ecuación transcendente, con un determinante infinito, el del sistema, por lo que los coeficientes no se pueden hallar con facilidad y las series no tienen porqué converger rápidamente, para grandes valores de x.

Llegados a este punto, parece importante, que el paso siguiente para resolver el problema , sea una idea intuitiva de la forma que puede tener la serie solución de la ecuación diferencial dada, e ir así obteniendo, mediante " ideas felices" las posibles soluciones en forma de serie.

Así, en el caso de singularidades irregulares de rango finito, ciertas soluciones formales existen, sin caer en las dificultades anteriores; los coeficientes en e tos casos pueden ser hallados por recurrencia, y las series pueden utilizarse para cálculos numéricos, tomando un entorno de x_0 suficientemente pequeño. Este método fué descubierto por Thomé en 1.872, y las soluciones son de la forma $y = e^{P(x)}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k-\rho}$ para $x_0 = \infty$, con $c_0 \neq 0$ y $P(x)$ un polinomio. Estas soluciones son llamadas soluciones normales ; para el caso de una ecuación de segundo orden, con $x_0 = \infty$ singularidad irregular de rango finito .

Sea la ecuación diferencial del tipo $y'' + q(x)y = 0$ (1) , con $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_n x^{-n}$ (2) una serie, de momento convergente en un entorno del infinito. Esto no supone ninguna restricción pues toda ecuación homogénea de segundo orden, que escrita de la forma general será $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, mediante el cambio $y(x) = w(x)\ e^{-1/2\int p(x)dx}$ queda de la forma $w'' + (\ q(x) - 1/2\ p'(x) - 1/4p^2(x))w(x) = 0$. Por lo que se puede considerar, sin pérdida de generalidad, desde el principio la ecuación (1) , sin que aparezca el término de y'.

Se trata de hallar soluciones normales de la forma (3) $y = e^{wx}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\rho-n}$, $c_0 \neq 0$, donde w y ρ son constantes.

Para simplificar la notación, se tomará $q_{-n}=0$, $c_{-n}=0$ para $n=1,2,...$ y así las sumas se pueden extender de $-\infty$ a ∞ . Sustituyendo (2) y (3) en la ecuación diferencial (1), se tiene

$$w^2\sum c_n x^{-\rho-n} - 2w\sum(\rho+n)c_n x^{-\rho-n-1} +$$
$$+\sum(\rho+n)(\rho+n-1)c_n x^{-\rho-n-2} + \sum q_n x^{-n}\sum x^{-\rho-n} = 0.$$

Comparando los coeficientes, se tiene

(4) $w^2 c_n - 2w(\rho+n-1)c_{n-1} + (\rho+n-2)(\rho+n-1)c_{n-2} +$
$+\sum_{i=0}^{m} q_i c_{n-i} = 0$, para todo n entero . La primera condición válida, aparece para n=0 en (4), suponiendo $c_0 \neq 0$, (5) $w^2 + q_0 = 0$. Si hacemos n=1 en (4) ,y se satisface (5) entonces se tiene (6) $-2w\rho + q_1 = 0$.

Estas dos ecuaciones (5) y (6) determinan w y ρ . La relación de recurrencia para los coeficientes puede tomarse de (4), reemplazando n por n+1 y simplificando con (5) y (6) se tiene

(7) $2wnc_n = (\rho+n)(\rho+n-1)c_{n-1} + \sum_{i=0}^{n+1} q_i c_{n+1-i}$, n=1,2,...

Luego existen soluciones normales para $q_0 \neq 0$, ó $q_0 = q_1 = 0$. Así pues, w, ρ , c_1, c_2, . . . ,c_n, ... estan completamente determinados por q_0, q_1, q_2, . . .q_{n+1},... y viceversa. Además, en este caso se tienen dos soluciones normales, para dos dos diferentes valores de w.

En el caso de una singularidad regular es $q_o=o$ y $q_1=o$, por lo que de la ecuación $w^2+q_o=o$ queda $w=o$, y desaparece la ecuación (6) para ρ. Sin embargo, de (4), para n= 1; se tiene $\rho(\rho+1)+q_o=o$, con lo que se obttenen dos valores para ρ , y de nuevo con la ecuación (7), para n=2,3,. . . se determinan los coeficientes.

Si $q_o=o$, y $q_1\neq o$ entonces las ecuaciones (5) y (6) no se satisfacen y existen soluciones no normales. Por ejemplo, transformando la ecuación diferencial (1) mediante el cambio de variables $\xi=x^{1/2}$, $\eta(\xi)=\xi^{-1/2}y(x)$, la ecuación queda de la forma

(8) $\eta''+(4\xi^2q(\xi^2)-3/4\xi^2)\eta=0$, con lo cual la ecuación diferencial (8) tiene una singularidad irregular en el ∞; con soluciones normales en el infinito, las cuales dan lugar a soluciones no normales de (1), de la forma $y=e^{wx^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,x^{(1/2-1/2\,n)}$.

Las soluciones normales y no normales son soluciones formales; es decir, si son sustiuidas en la ecuación diferencial como series infinitas convergentes, la ecuación diferencial se satisface. Sin embargo, las series infinitas dadas por las soluciones formales son en general divergentes, aunque constituyen un desarrollo asintótico de la solución.

Hay dos métodos para probar que las soluciones formales son desarrollos asintóticos de las soluciones de la ecuación diferencial. El primero de ellos fué propuesto por Poincaré y desarrollado por Horn. Este método consiste en hallar representaciones integrales del tipo de Laplace para las soluciones, y los correspondientes desarrollos asintóticos.

El otro método fué desarrollado por Birhoff y sus alumnos, usando las representaciones asintóticas ó sumas parciales de la solución formal para construir una ecuación diferencial y poder comparar las dos ecuaciones. En ambos métodos juegan un papel muy importante la ecuación integral de Volterra ó las ecuaciones integro diferenciales.

2.4. Veamos como ejemplo una variante del segundo método para discutir la ecuación diferencial (1) con $q_o \neq o$, basada en el trabajo de Hoheisel de 1.924 y Tricomi de 1.953.

Para simplificar, se supondrá que x es una variable real y que $q(x)$ es contínua para $x \geq a > 0$, y que su desarrollo asintótico es $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^{-n}$ cuando x tiende a infinito y $q_0 \neq 0$; entonces se obtienen dos soluciones formales $e^{wx} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\rho-n}$, $c_0 \neq 0$, donde $w, \rho, c_1, c_2, \ldots$ satisfacen las condiciones anteriores. Se trata ahora de probar que estas soluciones formales son desarrollos asintóticos de ciertas soluciones de (1) .

Sea $w = w_1 + iw_2$, $\rho = \rho_1 + i\rho_2$, con $w = (-q_0)^{1/2}$ de forma que $e^{wx}x^{-\rho}$ esté acotado cuando x tiende a infinito, es decir: si q_0 es real y $q_0 < 0$, se toma la raiz cuadrada tal que $w_1 < 0$, y si $q_0 > 0$, se toma la raiz cuadrada tal que $\rho_1 = \mathrm{Re}(q_1/2w) > 0$, si $\mathrm{Im}q_1 \neq 0$, y si $q_1 \in \mathbb{R}$ tomamos cualquiera de las raices. En todo caso, se puede elegir la raiz de forma que $w_1 < 0$, si $q_0 \in \not{C}$. Con lo cual tenemos $w_1 < 0$ ó $w_1 = 0$ y $\rho_1 \geq 0$.

Se transforma la ecuación (1) mediante el cambio $y(x) = e^{wx}x^{-\rho} z(x)$, luego z satisface la ecuación diferencial

(2) $z'' + 2(w - \rho/x)z' + (w2 - 2w\rho/x + \rho(\rho + 1)/x^2 + q(x))z = 0$

con $w^2 + q_0 = 0$ y $-2w\rho + q_1 = 0$, tomando $F(x) =$
$= x^2(q(x) - q_0 - q_1 x^{-1}) + \rho(\rho + 1)$, entonces F está acotada cuando x tiende a infinito, es decir existe $A > 0$ tal que $|F(x)| \leq A$, $x \to \infty$, luego
$d/dx (e^{2wx} x^{-2\rho} dz/dx) + e^{2wx} x^{-2\rho - 2} F(x) z(x) = 0$, e integrando, se tiene $dz/dx + e^{-2wx} x^{2\rho} \int_b^x e^{2wt} t^{-2\rho-2} F(t) z(t) dt =$
$= c_2 e^{-2wx} x^{2\rho}$, donde c_2 y $b \geq a$ son constantes arbitrarias . Integrando de nuevo se tiene

$$z(x) + \int_b^x K(x,t) F(t) z(t) t^{-2} dt = c_1 + c_2 \int^x e^{-2wt} t^{2\rho} dt ,$$

donde $K(x,t) = - \int_x^t e^{2w(t-s)} (s/t)^{2\rho} ds.$

Esta ecuación es una integral del tipo de Volterra. Cualquier solución de (2) la satisface para algunos b, c_1, c_2 y viceversa, es decir, cualquier solución continuamente diferenciable dos veces satisface (2) para todo b, c_1, c_2 . La existencia de tal solución se sigue de la teoría general de ecuaciones integrales donde $b < \infty$. Cuando $b = \infty$, la ecuación integral es singular y la existencia y diferenciabilidad de la solución ha de ser demostrada.

Se trataba de probar que (2) tiene una solución que puede ser representada asintóticamente por $\sum c_n x^{-n}$, para lo cual se tomará $b = \infty$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$

en la ecuación integral anterior que queda de la forma

(3) $z = 1 + \int_x^{\infty} K(x,t)F(t)z(t)t^{-2}dt$ y que puede ser resuelta por el método de aproximaciones sucesivas.

Sea, para cualquier función $\xi(x)$,

$T\xi(x) = \int_t^{\infty} K(x,t)F(t)\xi(t)t^{-2}dt$, y se define $z_0(x)=1$, $z_{n+1}(x) = Tz_n(x)$, $z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x)$. Ahora sólo queda probar que $z(x)$ existe, satisface la ecuación (3) , es diferenciable, y verifica (2).

Veamos en primer lugar que el núcleo $K(x,t)$ está acotado para $t \geq x \geq x_0$, donde $x_0 \geq a$ suficientemente grande . En efecto, sea cualquier $w_1 < 0$, ó $w_1=0$ y $\rho_1 \geq 0$, entonces $d/ds(\log(e^{-2w_1 s}s^{2\rho_1}))=-2w_1 + 2\rho_1/s \geq 0$ para s suficientemente grande, luego $e^{-2w_1 s}\, s^{2\rho_1}$ es una función creciente de s .

$e^{2w(t-s)}(s/t)^{2\rho}= e^{2w_1(t-s)}\,(s/t)^{2\rho_1}\,(\phi_1(s,t) + i\phi_2(s,t))$

donde $\phi_1(s,t) + i\phi_2(s,t) = e^{2iw_2(t-s)}(s/t)^{2i\rho_2}$

$-K(x,t) = \int_x^t e^{2w_1(t-s)}(s/t)^{2\rho_1}\,(\phi_1(s,t) + i\phi_2(s,t))ds =$

$= e^{2w_1(t-x)}(x/t)^{2\rho_1}\,(\int_x^{\xi}\phi_1(s,t)ds + i\int_x^{\eta}\phi_2(s,t)\,ds) +$

$+ \int_{\xi}^t \phi_1(s,t)ds + i\int_{\eta}^t \phi_2(s,t)ds$, por el segundo teorema generalizado del valor medio, con $\xi,\eta \in (x,t)$.

Como las integrales que aparecen en la última igualdad son funciones acotadas de x y t, y además $e^{2w_1(t-x)}(x/t)^{2\rho_1} \leqslant 1$, con $t \geqslant x \geqslant x_0$, x_0 suficientemente grande , entonces existe B tal que $|K(x,t)| \leqslant B$, con $t \geqslant x \geqslant x_0$. Si además se verifica que $|\zeta(t)| \leqslant ct^{-\lambda}$ para $t \geqslant x_0$, donde $\lambda > -1$, entonces $|T\zeta(x)| \leqslant ABCx^{+\lambda-1}/(\lambda+1)$ con $x \geqslant x_0$, ya que $|T\zeta(x)| = |\int_x^\infty K(x,t)F(t)\zeta(t)t^{-2}dt| \leqslant$ $\leqslant ABC\int_x^\infty t^{-\lambda-2}\, dt$.

Entonces se verifica por inducción que $|z_n(x)| \leqslant (AB)^n x^{-n}/n!$, $x \geqslant x_0$, lo que prueba que la serie $z = \sum z_n$ converge uniformemente para $x \geqslant x_0$, y satisface la ecuación (3), pues podemos integrar término a término por la convergencia uniforme. Además la integral de la ecuación (3) es una función diferenciable de x, pues $K(x,x) = 0$, $\partial K(x,t)/dx = e^{2w(t-x)}(x/t)^{2\rho}$ luego diferenciado la ecuación (3), se tiene $z'(x) = \int_x^\infty e^{2w(t-x)}(x/t)^{2\rho}F(t)z(t)t^{-2}dt$. Esta nueva integral es otra vez diferenciable respecto a x y satisface la ecuación diferencial (2) .

Por lo tanto se ha encontrado una solución de la ecuación diferencial (1), que es de la forma

$y = e^{wx}x^{-\rho} z(x)$, donde $z(x) = \sum z_n(x)$.

Si $q_0 > 0$ y q_1 es real, los dos valores posibles para w son válidos, y se obtienen dos soluciones linealmente independientes de la forma anterior. Sin embargo, en todos los casos se puede considerar $y_2(x) = y_1(x)\int_b^x (y_1(t))^{-2}dt$, donde b es cualquier número suficientemente grande, con $y_1(x) \neq 0$, para $x \geq b$.

Así en cada uno de los casos se han obtenido dos soluciones linealmente independientes en el intervalo $x \geq x_0$, con $x_0 \geq \alpha$, por lo que se pueden extender al intervalo $x > a$.

Ya sólo queda probar que las soluciones formales encontradas antes son desarrollos asintóticos de las soluciones que se acaban de encontrar, para lo cual notemos en primer lugar que

$$(4)\quad \begin{cases} \int_x^{\infty} e^{-t}t^{-u}dt \sim e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(u)_n x^{-u-n} & \text{cuando } x \to \infty \\ \int_b^x e^{t}t^{-u}dt \sim e^{x}\sum_{n=0}^{\infty} (u)_n x^{-u-n} & \text{"} \quad x \to \infty \end{cases}$$

donde $(u)_0=1$, $(u)_r= u(u+1)\ldots(u+r-1)$. Estos resultados se pueden probar por integración por partes con $g=t^{-u}$, $h_{-n}= (-1)^n e^{\mp t}$. Además se verifica que

$$(5)\begin{cases}\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t}t^{-u}dt = O(e^{-x}x^{-u}) & \text{cuando } x \to \infty\\ \displaystyle\int_{\infty}^{x} e^{t}t^{-u}dt = O(e^{x}x^{-u}) & \text{"} \quad x \to \infty\end{cases}$$

El siguiente paso será probar por inducción que cada una de las funciones z_n , n= o,1,2,. . . definidas antes, poseen un desarrollo asintótico en serie de potencias de la forma $z_n(x) \sim \sum_{k=n}^{\infty} c_{kn}x^{-k}$ cuando x tiende a infinito.

Evidentemente es cierto para n=0, y si se supone cierto para n, entonces $F(t)z_n(t) \sim \sum_{k=n}^{\infty} a_k t^{-k}$ cuando $x \to \infty$. Pero $z'_{n+1}(x) = \int_x^{\infty} e^{2w(t-x)}(x/t)^{2\rho} F(t)z_n(t)t^{-2}dt$, luego si w y ρ son reales , la proposición III.4.2. justifica la sustitución del desarrollo asintótico de $F(t)z_n(t)$ en la integral, de forma que $z'_{n+1}(x) \sim$

$$\sim \sum_{k=n}^{\infty} a_k \int_x^{\infty} e^{2w(t-x)}(x/t)^{2\rho}t^{-k-2}dt \text{ , cuando } x \to \infty .$$

Si w ó ρ son complejos, se tomará un número finito de términos, con un resto, sustituimos en la integral y estimamos el error en z'_{n+1} por (5) . En cualquier caso cada integral en z'_{n+1} posee un desarrollo asintótico que puede ser obtenido de (4), partiendo de x^{-k-2}. Utilizando la segunda proposición de III.1.3. se puede sustituir este desarrollo en z'_{n+1} , con $\mu(n)=n$, se comprueban fácilmente las condiciones y agrupando, se tiene $z'_{n+1}(x) \sim \sum_{k=n}^{\infty} b_k x^{-k-2}$ con lo que se puede volver a integrar para obtener el desarrollo asintótico de z_{n+1}.

La primera proposición de III.1.2. hace posible sustituir el desarrollo de $z_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_{kn} x^{-k}$ en $z(x) = \sum z_n(x)$, con $z_n(x) = O(x^{-n})$, la uniformidad es trivial y se verifican las condiciones exigidas por el último teorema. Entonces $z(x)$ posee un desarrollo asintótico de la forma $z(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}$, cuando $x \to \infty$.

Sólo queda probar que estos coeficientes c_n satisfacen la ecuación

$$w^2 c_n - 2w(\rho + n-1) c_{n-1} + (\rho + n-2)(\rho + n-1) c_{n-2} + \sum_{i=0}^{n} q_i c_{n-i} = 0.$$

Ahora bien, de las relaciones integrales que verifican z' y z'' se sigue que ambas poseen un desarrollo asintótico en serie de potencias, por lo que podemos aplicar III.4. y entonces $z(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}$ se puede diferenciar dos veces y las series resultantes verifican formalmente la ecuación diferencial

$$z'' + 2(w-\rho/x) z' + (w^2 - 2w\rho/x + \rho(\rho+1)/x^2 + q(x)) z(x) = 0 \text{ ;}$$

con lo cual sus coeficientes verifican la ecuación pedida. Se puede tomar $c_o = 1$.

Para terminar probemos que $y_2(x) = y_1(x)\int_b^x (y_1(t))^{-2}dt$ está representada por otra solución formal.

Si se toma $y_2(x) = e^{-wx}x^{\rho}z_2(x)$, entonces $z_2(x) = z(x)\int_b^x e^{2w(x-t)}(x/t)^{-2\rho}(z(t))^{-2}dt$. Pero también podemos tomar a_n, tales que $(z(t))^{-2} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n t^{-n} + O(t^{-N})$ para $t \geqslant b$, pues $c_o = 1$, invirtiendo el desarrollo de $z(t)$ y elevando al cuadrado, y entonces

$$z_2(x)/z(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_b^x e^{2w(x-t)}(x/t)^{-2\rho}t^{-n}dt +$$
$$+ \int_b^x e^{2w(x-t)}(x/t)^{-2\rho}O(t^{-N})\,dt.$$

La primera integral puede ser desarrollada asintóticamente por (4), y la última integral es una $O(x^{-N})$, utilizando (5) . Pero N es simplemente un entero positivo arbitrario, por lo que $z_2(x)/z(x)$ tiene un desarrollo asintótico en serie de potencias, luego $z_2(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{-n}$, cuando x tiende a infinito. Y por consideraciones análogas a las de $z(x)$, para $z_2(x)$ se puede probar que los coeficientes C_n satisfacen las relaciones deseadas.

Si w y ρ son las dos imaginarias, las dos soluciones formales, ambas de la forma $y(x)=e^{wx}x^{-\rho}z(x)$ estan definidas salvo una constante, de forma que las dos están acotadas y ninguna se aproxima a cero cuando x tiende a infinito. En los demás casos, una de las dos soluciones $y_1(x)$ se aproxima a cero en el infinito, y la segunda no está acotada cuando $x \to \infty$, y además no es única pues depende de b.

2.5. Veamos el caso de tner x como variable compleja. Los resultados anteriores se pueden extender al caso complejo en una región vectorial abierta S, $|x| > a$, $\alpha < \arg x < \beta$. Se supone que $q(x)$ es analítica en S y que tiene un desarrollo asintótico $q(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^{-n}$, $q_0 \neq 0$, uniformemente en arg x, cuando $x \to \infty$ en S. Entonces tenemos dos soluciones formales $e^{wx}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\rho-n}$ $c_0 \neq 0$, donde $w^2 + q_0 = 0$. La recta $\mathrm{Re}(x(-q_0)^{1/2}) = 0$ se llama recta crítica, ó recta de Stokes. Si $x \to \infty$ a lo largo de esta recta, los factores exponenciales en ambas soluciones estan acotados. Si $x \to \infty$ a lo largo de otra recta, el término dominante en una de las soluciones formales aumenta exponencialmente.

En el caso de que la recta crítica no tenga intersección con S, entonces evidentemente se verifica que $\beta - \alpha < \pi$, y se puede tomar w como solución de $w^2 + q_o = 0$ de forma que $Re(wx) < 0$, para todo x de S. Si x varía a lo largo de una recta de forma argx = constante, en S, los resultados anteriores son válidos, pues en la ecuación integral $z(x) = 1 + \int_x^{\infty} K(x,t)F(t)z(t)t^{-2}dt$, integramos a lo largo de la recta argx = argt , y las acotaciones del núcleo se toman análogamente. La ecuación integral puede ser resuelta como antes, y se puede probar que cada $z_n(x)$ es analítica en S, y z(x) también, por ser límite uniforme de funciones analíticas. Se puede elegir b, tal que $y_1(x) \neq 0$ cuando $|x| \geq b$, $\alpha \leq \arg x \leq \beta$. El resultado es la existencia de dos soluciones y_1 e y_2 que en S pueden ser respresentadas asintóticamente por múltiplos de las soluciones formales $e^{wx}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\rho - n}$. Los desarrollos asintóticos son válidos uniformemente en arg x, cuando $x \to \infty$, $\alpha \leq \arg x \leq \beta$. Cualquier solución de la ecuación diferencial es una combinación lineal de y_1 e y_2, y su desarrollo asintótico se obtiene de la combinación lineal de los desarrollos asintóticos de y_1 e y_2 .

Si la recta crítica tiene intersección con S, y lo descompone en un número finito de sectores S_k , $k=1,2,...K$; en cada uno de los sectores S_k tenemos un valor w_k de w, tal que $Re w_k < 0$, para todo x de S_k, y por lo tanto en cada S_k tenemos un sistema fundamental y_{1k}, y_{2k} que pueden ser representadas asintóticamente por las soluciones formales. Para ver una discusión completa de estos sistemas fundamentales, se puede seguir Hoheisel de 1.924. El sistema fundamental de la recta crítica no podrá ser tomado como sistema fundamental para los dos sectores separados por dicha recta, pues cada una de las dos soluciones aumenta exponencialmente en uno de los dos sectores y decrece exponencialmente en el otro.

Consideremos una solución y(x) de la ecuación diferencial en S, en cada sector S_k, y(x) será una combinación lineal de las dos soluciones fundamentales de ese sector, y en cada sector, y(x) podrá ser representada asintóticamente por una combinación lineal de las soluciones formales; los coeficientes pueden variar de un sector a otro. Esta circunstancia fué descubierta por Stokes y se llamó fenómeno de Stokes.

C A P I T U L O VI

.- S O L U C I O N E S A S I N T O T I C A S P A R A S I S T E M A S D E E C U A C I O N E S D I F E R E N C I A L E S D E P R I M E R G R A D O + .

1.- Clasificación.

2.- Soluciones .

3.- Caso general .

Introducción :

Este capítulo generaliza el anterior, pasando a estudiar sistemas lineales de ecuaciones de primer grado. El caso de una ecuación queda incluido en éste, mediante la transformación que se expone. Si la ecuación es $y^{n} - a_0(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$, hacemos

$$\left.\begin{array}{l} y_j = y^{j-1} \\ y_o = y \end{array}\right\} \quad j = 1,2, \ldots n.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} y_j' = y_{j+1} & j = 1,2, \ldots n-1. \\ y_n' = - a_n(x)y_1 - a_{n-1}(x)y_2 - \ldots - a_1(x)y_n(x) + f(x) & \end{array}\right.$$

y al resolver este nuevo sistema, obtenemos la función $y_1(x)$ que satisface la ecuación diferencial original .

Los sistemas que serán estudiados, los expresaremos de forma matricial $y' = A(x)\, y + f(x)$, donde $A(x)$ es una matriz cuadrada de orden n, y $f(x)$ una función compleja, en columna, de la variable compleja x. Las soluciones seran expresadas, en general, por sus desarrollos en serie de potencias, ó por sus desarrollos asintóticos.

Para las demostraciones se necesita definir una norma en el espacio de matrices cuadradas de orden n, y otra para los vectores. Como ambos espacios son de dimensión finita, las normas son equivalentes. Para tener una en concreto, se puede definir, por ejemplo, $A = (a_{ij})i,j=1,2,\dots n$ se toma $!!A!! = \max_{i=1,2,\dots n} \sum^{n} !aij!$

y si $v=(v_1,v_2,\dots v_n)$, $!!v!! = \max_{j=1,2,\dots n} !v_j!$

que verifican las condiciones :

a) $!!A!! = 0$ si, y sólo si, $A \equiv 0$

b) Si I es la matriz identidad $!!I! = 1$

c) Si $c \in \not{C} \Rightarrow !!cA!! = !c!!!A!!$

d) $!!A+B!! \leq !!A!! + !!B!!$

e) $!!AB!! \leq !!A!!!!B!!$

f) $\lim_{r \to \infty} A_r = 0$ si, y sólo si, $\lim_{r \to \infty} !!A_r!! = 0$

g) $v = \bar{0}$ si, y sólo si, $!!v!! \equiv 0$

h) $!!cv!! = !c! \cdot !!v!!$ si $c \in \not{C}$.

i) $!! u+v!! \leq !!u!! + !!v!!$.

j) $!!Av!! \leq !!A!! \cdot !!v!!$

k) Para toda matriz A, existe un vector $v \neq 0$ tal que

$!!Av!! = !!A!! \cdot !!v!!$

l) Si $\sum_{r=1}^{\infty} !!M_r!!$ converge, entonces $\sum_{r=1}^{\infty} M_r$ converge.

1.- Clasificación .

Empezaremos por dar una breve clasificación , siguiendo la del capítulo anterior, para los sistemas de ecuaciones diferenciales, expresados matricialmente, y trataremos de aproximar las soluciones de estas ecuaciones, mediante sus desarrollos asintóticos. Para simplificar la escritura, se tomará, casi siempre, el punto $x_0 = 0$, lo que no supone ninguna restricción, como ya se ha visto anteriormente, pues para cualquier otro punto basta hacer un cambio de variable.

Para la clasificación, tomaremos la ecuación diferencial honogénea $y' = A(x)\, y$ (1), donde $A(x)$ es una matriz función, matriz cuadrada nxn, con y, e y' dos vectores columna. La clasificación atenderá al comportamiento de la matriz A(x) en el punto x_0, como ocurria en el capítulo anterior.

1.1. Definición

Se dice que x_0 es un punto regular para la ecuación diferencial (1), si A(x) es holomorfa en una región R, con $x_o \in R$.

1.2. Definición

Se dice que x_o es un punto singular para la ecuación diferencial (1), cuando $A(x)$ no es holomorfa en x_o. Dependiendo del tipo de singularidad que tenga $A(x)$ en x_o, diremos, por ejemplo, que x_o es un punto singular regular, para la ecuación diferencial (1), si $A(x)$ tiene un polo de orden uno en x_o.

Decir que $x_o = o$ es singular regular será lo mismo que afirmar que la ecuación diferencial (1) se puede trasformar en una ecuación del tipo $xy' = A(x)y$, donde $A(x)$ es holomorfa en $x_o = 0$.

Cuando la singularidad sea un polo de orden $h > 1$ (entero positivo), se dirá que x_o es una singularidad irrregular de rango finito, y la ecuación diferencial, para $x_o = 0$, se podrá escribir de la forma $x^h y' = A(x)y$ donde $A(x)$ es holomorfa en $x_o = 0$, y por lo tanto desarrollable en serie de potencias.

También puede ocurrir, de forma mas general, que $A(x)$ no sea holmorfa, pero tenga un desarrollo asintótico, en serie de potencias, en el entorno de x_0. También trataremos de solucionar este caso.

El caso mas importante en el que se presentan singularidades irregulares es cuando $x_0 = \infty$, pero mediante la transformación $z=1/x$, se puede estudiar el comportamiento para $z = 0$.Las ecuaciones obtenidas que son de la forma $z^h y' = A(x)y$, y resultan por el cambio anterior de la ecuación $x^{-q} y' = A(x)\ y$, con $q = h-2$, y $A(x) = -B(1/z)$ tienen el punto $z=0$ como un punto singular irregular .

Al entero $q+1$ se le llama rango de la singularidad . Así, resulta que los puntos regulares tienen rango -1, los singulares regulares cero, y las singularidades irregulares tienen rango positivo.

2.- <u>Soluciones</u>.

2.1. En el caso de un punto x_0 regular para la ecuación $y' = A(x)y + f(x)$, el teorema clásico para ecua -

ciones no matriciales) se generaliza fácilmente, y se obtiene, para cada vector $y(x_o)$ una única solución holomorfa en R. Podemos dar su desarrollo en serie de potencias $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_o)^n$, donde el radio de convergencia es la menor de las distancias de x_o a los puntos donde $A(x)$ y $f(x)$ dejan de ser holomorfas . Para obtener los coeficientes c_n, basta considerar las series $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x-x_o)^n$ y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x-x_o)^n$, que existen y definen las funciones holomorfas $A(x)$ y $f(x)$, y sustituit las tres series en la ecuación diferencial, haciendo $y(x_o) = c_o$, y por recurrencia se obtienen los demás c_n .

2.2. Cuando se trata de un punto singular regular, no se puede hablar a priori, de un tipo de solución, ni siquiera de su existencia, aunque se puede seguir un procedimiento puramente formal.

Sea $x_o = 0$ y la ecuación diferencial (1) $xy' = A(x)y$, donde $A(x)$ es holomorfa en x_o. Con el cambio de variable (2) $y = P(x)\, z$, con $P(x)$ una matriz no singular en $x=0$, transformamos la ecuación (1) en la ecuación diferencial $xz' = B(x)z$, con $B(x) =$

$B(x) = P^{-1}(x)A(x)P(x) - xP^{-1}(x)P'(x)$, (3). Se trata de determinar $P(x)$, de forma que $B(x)$ sea lo más simple posible, y que origine una solución explícita de (2) .

La ecuación (3) es equivalente a la ecuación (4) $xP'(x) = A(x)P(x) - P(x)B(x)$, siempre que $\det P(x) \neq 0$. A simple vista, parece que (4) es un problema tan complicado como (1), sin embargo el hecho de que $B(x)$ no esté fijada previamente, lo hace mas sencillo.

Probemos una función holomorfa $P(x)$ en el punto $x=0$, para satisfacer la ecuación (4)

(5) $P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r$; (6) $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r$;

(7) $B(x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r x^r$. Si existe una solución de la forma (5), para un cierto tipo de función $B(x)$, sustituyendo estas series en la ecuación (4) e identificando los coeficientes de las potencias iguales, obtenemos las condiciones :

(8) $A_o P_o - P_o B_o = 0$

(9) $(A_o - rI)P_r - P_r B_o = - \sum_{s=0}^{r-1} (A_{r-s} P_s - P_s B_{r-s})$, $r > o$.

Esto es una sucesión de ecuaciones recurrentes para P_o,

P_1, P_2, . . . , matrices que se pueden calcular previa una elección de las matrices B_o,B_1, . . . tan simple como sea posible. Otra cuestión, es la pregunta referente a la convergencia de las series (5) y (7) , formadas con estos coeficientes. De momento, como ya se ha dicho, se trata simplemente de un procedimiento formal, para esclarecer el tipo de posible solución.

Recurriendo al álgebra de matrices para hallar P_o, se hace uso del teorema que dice :
"La ecuación AX-XB = 0 tiene soluciones distintas de X = 0 si, y sólo si, A y B tienen al menos un autovalor común, siendo A,B,X, matrices cuadradas de orden nxn , con coeficientes complejos ". La más obvia elección para B_o en (8), es $B_o=A_o$, con lo que basta tomar $P_o=I$.

Ciertamente, esto conduce a una simplificación del problema, aunque no será siempre resoluble. La dificultad está en el hecho de que A_o y A_o-rI pueden tener autovaleres en común, para ciertos enteros positivos r. Ahora bien, cada ecuación (9) forma un conjunto de n^2 ecuaciones escalares, para los n^2 coeficientes de la mattiz Pr . Si A_o- rI y Ao tienen un autovalor en común , la ecuación homogénea correspondiente a (9) tiene en general por el teorema citado anteriormente, una solución no trivial. Por consiguiente, las ecuaciones (9) no tienen, en general, solución para todo valor de r.

Si por el contrario, $A_0 - rI$ y A_0 no tienen autovalores comunes, para cualquier entero positivo r, entonces todas las ecuaciones (9) tienen soluciones únicas para Pr, que pueden ser hallados sucesivamente para r= 1,2,... siempre que B_s, $s > 0$ esten elegidos. La elección mas simple será $B_s = 0$, con lo cual se ha probado el siguiente teorema :

<u>Teorema 1</u>

Si la matriz A_0, en el desarrollo convergente $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r$ no tiene autovalóres que difieran en enteros positivos, entonces existe una serie formal $\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r$, con $P_0 = I$, tal que la transformación formal $y = (\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r)z$, reduce la ecuación diferencial $xy' = A(x)y$ a la forma $xz' = A_0 z$.

Si A_0 tiene autovalores que difieren en enteros positivos, sea K el mayor de éstos. En este caso podemos tomar de nuevo $B_o=A_o$ y $P_o= I$, pero entre las primeras K, las ecuaciones (9) pueden resultar incompatibles con $B_r= 0$. Entonces elegimos $P_r= 0$ y determinamos B_r, es decir $B_r = -\sum_{s=1}^{r-1} P_s B_{r-s} + \sum_{s=0}^{r-1} A_{r-s} P_s$. Esta elección sirve para generalizar el teorema anterior de la forma siguiente :

Teorema 2

Si K es el mayor entero no negativo que es diferencia de dos autovalores de A_o, entonces existe una serie formal $\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r$, con $P_o= I$, tal que la transformación formal $Y = (\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r)Z$ reduce la ecuación diferencial $xY'= A(x) Y$ a la ecuación $xZ'= (\sum_{r=0}^{K} B_r x^r)Z$, $B_o= A_o$".

Una vez obtenida una simplificación formal, se trata de probar que efectivamente es una simplificación analítica en un entorno del origen . Es decir, hay que probar la convergencia de las series formales que hemos construido, para lo cual utilizaremos el siguiente teorema.

Teorema 3

Sea $F(x) = \sum_{r=0}^{\infty} F_r x^r$ una matriz función holomorfa para $|x| < x_o$, y sea $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ una serie formal vectorial que satisface la ecuación diferencial $xz' = (\sum_{r=0}^{\infty} F_r x^r) z$ (10) para el vector z, en el sentido formal. Entonces $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ converge para $|x| < x_o$ y representa una solución de la ecuación diferencial (10) .

Demostración

Si $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ satisface formalmente la ecuación (10) , entonces se verifican las condiciones que resultan de sustituir la serie en la ecuación diferencial, efectuar la multiplicación formal e identificar los coeficientes de las potencias de x. Es decir :

(11) $F_o a_o = o$

(12) $(F_o - rI) a_r = - \sum_{s=1}^{r} F_r a_{r-s}$

Sea K el entero positivo menor tal que $\det(F_o - rI) \neq o$ para todo $r > K$. Entonces $(F_o - rI)^{-1}$ existe para todo $r > K$ y además existe una constante real positiva c, independiente de r, tal que (13) $\|(F_o - rI)^{-1}\| \leq c$, para todo $r > K$. Pero (12) implica que (14) $\|a_r\| \leq c \sum_{s=1}^{r} \|F_s\| \|a_{r-s}\|$ para $r > K$, con lo cual podemos defirnir la función holomorfa $\phi(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \|F_r\| x^r$, $|x| < x_o$. La convergencia de esta serie en $!x! < x_0$ está probada pues la convergencia de $\sum_{r=0}^{\infty} F_r x^r$ implica que la sucesión $F_r \alpha^r$ está acotada, siempre que $!\alpha! < x_0$, es decir, $!!F_r \alpha^r!! \leq M_\alpha$, de donde $!!F_r!! \leq M_\alpha !\alpha!^{-r}$, con lo cual $\sum_{r=1}^{\infty} M_\alpha !x/\alpha!^r$ converge si $!x! < \alpha$, y esta serie mayora a $\phi(x)$.

Ahora podemos introducir la función escalar mayorante

$$\hat{y}(x)=(1- c\phi(x))^{-1}\left[I!a_0!! + \sum_{s=1}^{K} \left\{ !!a_s!! - c\sum_{t=1}^{s} !!F_t!!!!a_{s-t}!! \right\} x^s\right]$$

(Si K=0, la suma en s no existe). El motivo para esta construcción se puede ver mas claramente, si escribimos la fórmula anterior de la forma

$$\hat{y}(x)=c\phi(x)\hat{y}(x) + !!a_0!! + \sum_{s=1}^{K}\left\{!!a_s!! - c\sum_{t=1}^{s}!!F_t!!!!a_{s-t}!!\right\} x^s$$

Como $\phi(o) = 0$, entonces existe un número positivo $x_1 \leq x_0$, tal que $\hat{y}(x)$ es holomorfa en $!x! < x_1$. Sea $\hat{y}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \hat{a}_r x^r$, $!x! < x_1$. Sustituyendo esta serie en la fórmula de definición de $\hat{y}(x)$ e identificando los coeficientes de las potencias de x en ambos miembros, se tienen las condiciones :

$$\hat{a}_r = !!a_r!! \quad \text{si } r \leq K .$$

$$\hat{a}_r = c \sum_{s=1}^{r} !!F_s!! \; \hat{a}_{r-s} \qquad \text{si } r > K .$$

Una comparación con la desigualdad (14) muestra que $\|a_r\| \leq \hat{a}_r$, $r = 0,1,2,\ldots$. Con lo cual la convergencia de la serie $\hat{y}(x)$ implica la convergencia de $\sum_{r=0} a_r x^r$ cuando $|x| < x_1$. Entonces podemos diferenciar la serie término a término en $|x| < x_1$ y por lo tanto la función $z=y(x)=\sum a_r x^r$ satisface la ecuación diferencial (10) en ese disco gracias a las fórmulas recurrentes (11) y (12). Como la ecuación diferencial no tiene puntos singulares en $x_1 \leq |x| \leq x_0$, tampoco la solución puede tener singularidades en este anillo. Entonces la serie $\sum_{r=0} a_r x^r$ converge en el círculo $|x| < x_0$.

Esta demostración, sirve también como prueba del siguiente teorema, que es el equivalente analítico del teorema 2 .

Teorema 4

La serie formal $\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r$ del teorema 2, converge en el círculo de convergencia de la serie de potencias $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r$.

La ecuación diferencial $xz'=A_o z$ es fácilmente resoluble ya que la matriz $z= e^{A_o \log x} = x^{A_o}$ es una matriz fundamental de la ecuación. Basta comprobar que $d/dx\ (x^{A_o}) = A_o x^{A_o-1}$. Pero teniendo en cuenta las transformaciones hechas hasta ahora, lo que se ha probado en realidad es el siguiente teorema .

Teorema 5

Si $A(x)$ es holomorfa en $x= 0$ y si para cada dos autovalores de $A(o)$, éstos no difieren en un entero positivo, entonces la ecuación diferencial $xy'= A(x)y$ tiene una matriz fundamental de la forma $y = P(x)\ x^{A(o)}$, con $P(o) = I$, donde $P(x)$ es holomorfa en $x= 0$ y su serie de potencias puede ser calculada mediante operaciones racionales con los coeficientes A_r de la serie $A(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r$.

2.3. El caso de un punto singular irregular es diferente. Se tratará el punto $x_o= \infty$, que aparece con mas frecuencia, en la ecuación diferencial (1) $x^{-q}dy/dx=A(x)y$ Para cualquier otro punto, bastará hacer el cambio de variable correspondiente en la ecuación, y pasarlo al infinito.

Primeramente se verá lo que ocurre, con el caso trivial de que se tenga una ecuación escalar, es decir la matriz A(x) será de orden uno y holomorfa para $x_0 < |x| < \infty$ en un sector S, con el desarrollo asintótico $A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}$, $x \to \infty$, $x \in S$. Este caso permitirá utilizar éstos resultados en el caso general y preveer la estructura de la solución esperada en el caso general.

Sea $a \in S$, con $|a| > x_0$. La solución general de la ecuación diferencial (1) es $y = c^* e^{\int_a^x t^q A(t)\,dt}$, donde c^* es una constante arbitraria.

Pero $t^q A(t) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r t^{-r+q} + A_{q+1} t^{-1} + B(t)$ con $B(t) \sim \sum_{r=q+2}^{\infty} A_r t^{q-r}$, $t \to \infty$, $t \in S$. Si hacemos $Q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^{q+1-j}/(q+1-j)$, tenemos $y = c e^{Q(x)} x^{\rho} e^{\int_{\infty}^{x} B(t)\,dt}$ donde $c = c^* e^{(-Q(a) - \rho \log a + \int_a^{\infty} B(t)\,dt)}$.

Aplicando las proposiciones III.4.5.y III.2.5. tenemos que $e^{\int_{\infty}^{x} B(t)\,dt} \sim \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{-r}$, $x \to \infty$, $x \in S$, siempre que el camino de integración esté en S. Con lo que $V(x) \sim \left(\sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{-r}\right) x^{\rho} e^{Q(x)}$ cuando $x \to \infty$ en S, es un desarrollo asintótico de la solución de la ecuación.

Esta expresión de la solución dá exactamente la forma de la estructura de la solución en el caso n-dimensional.

El procedimiento que se seguirá en este caso es análogo al seguido en el caso de singularidades regulares. En primer lugar estudiaremos una simplificación formal que viene dada por la transformación $y= P(x)z$, en donde $P(x)$ es una matriz funcional con determinante no nulo en el infinito.

Esta transformación reduce la ecuación diferencial (1) a la nueva ecuación $x^{-q}z' = B(x)z$, con $B(x) = P^{-1}(x)A(x)P(x) - x^{-q}P^{-1}(x)P'(x)$, es decir

$x^{-q}P'(x) = A(x)P(x) - P(x)B(x)$ (*) .

Tomando $P(x)=\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}$ y $B(x)=\sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r}$ con el desarrollo de $A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}$, para $x \to \infty$, y $x \in S$; e insertamos las series en la ecuación (2) para identificar coeficientes y obtener las condiciones:

$A_oP_o - P_oB_o = 0$ (2)

$A_oP_r - P_rB_o = (P_sB_{r-s} - A_{r-s}P_s) - (r-q-1)P_{r-q-1}$ (3)

con $r > o$ y el último término desaparece cuando $r-q-1 < o$.

Se trata ahora de conseguir una solución de las ecuaciones anteriores. Se observa que si $P(x) = P$ es una matriz constante, se trata de una transforma - ción de semejanza para la matriz $A(x)$, y la nueva será $B(x) = P^{-1}A(x)P$. Utilizaremos este hecho para transformar la matriz A_o, de forma conveniente para los cálculos posteriores .

Si los autovalores de A_o los podemos separar en dos grupos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ y $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$, tales que $\lambda_j \neq \lambda_k$ para $j \leq p$, $K > p$, entonces A_o es semejante a una matriz diagonal de cajas

$$(4) \quad \begin{pmatrix} A_o'' & 0 \\ 0 & A_o^{22} \end{pmatrix}$$

donde A_o^{11} es una matriz pxp con los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ y A_o^{22} es una matriz $(n-p)x(n-p)$ con los autovalores $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$.

Con esta hipótesis referente a A_o, tomamos $B_o = A_o$ y $P_o = I$. Entonces las formulas (3) quedan de la forma (5) $A_oP_r - P_rA_o = B_r + H_r$, donde H_r depende solamente de las P_j, B_j con $j < r$. Entonces, las ecuaciones (5) para P_r son siempre singulares, en el sentido de que las correspondientes ecuaciones homogéneas tienen soluciones no triviales.

Vamos a probar que estas ecuaciones son resolubles, eligiendo las matrices B_r y P_r de las formas

$$Br = \begin{pmatrix} B_r^{11} & 0 \\ 0 & B_r^{22} \end{pmatrix} \quad (6) \qquad Pr = \begin{pmatrix} 0 & P_r^{12} \\ P_r^{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (7),\ r > 0 .$$

Escribiendo $H_r = \begin{pmatrix} H_r^{11} & H_r^{12} \\ H_r^{21} & H_r^{22} \end{pmatrix}$ (8) y sustituyendo las expresiones (4), (6), (7) y (8) en la ecuación (5) se obtienen las condiciones

$$(9) \begin{cases} 0 = B_r^{11} + H_r^{11} & A_o^{11}P_r^{12} - P_r^{12}A_o^{22} = H_r^{12} \\ A_o^{22}P_r^{21} - P_r^{21}A_o^{11} = H_r^{21} & 0 = B_r^{22} + H_r^{22} \end{cases}$$

Si H_r es conocido, podemos satisfacer dos de estas ecuaciones tomando $B_r = -H_r^{11}$ y $B_r^{22} = -H_r^{22}$. Las otras dos poseen una única solución para P_r^{12} y P_r^{21} en virtud del mismo teorema algebraico, al que se hizo referencia en 2.2. , ya que A_o^{22} y A_o^{11} no tienen, por hipótesis, autovalores en común. Partiendo de r=1 , las ecuaciones (9) se pueden resolver sucesivamente. Con lo que se ha demostrado el siguiente teorema .

<u>Teorema 1</u>

Si los autovalores de A_o ($A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} Arx^{-r}$,

$x \to \infty$, $x \in S$) se pueden separar en dos grupos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ y $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ con $\lambda_j \neq \lambda_k$ para $j \leq p$, $k > p$, entonces existe una serie formal de potencicas $\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}$, con $\det P_0 \neq 0$, tal que la sustitución formal $y=(\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r})z$ cambia la ecuación diferencial (1) en la ecuación diferencial formal $x^{-q}z' = (\sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r})\, z$, donde todas las B_r son de la forma diagonal (6) .

Este teorema se puede expresar también de forma que se eviten las operaciones formales como en el corolario siguiente

Corolario

Con las hipótesis y la notación del teorema anterior, la transformación $y= (\sum_{r=0}^{m} P_r x^{-r}) z_m$, cambia la ecuación diferencial (1) en $x^{-q}z_m' = z_m(\sum_{r=0}^{m} B_r x^{-r} + B^*(x,m)x^{-(m+1)})$ donde la matriz $B^*(x,m)$ está acotada en un entorno de $x=\infty$. El entero no negativo m es arbitrario.

Ahora se trata de probar que este cambio se puede hacer analíticamente, y que las series obtenidas formalmente ó bien son convergentes ó bien son desarrollos asintóticos. Para lo cual se introducen dos nuevas matrices desconocidas $\hat{P}(x)$ y $\hat{B}(x)$ mediante las relaciones (10) $P(x) = I + \hat{P}(x)$

(11) $B(x) = A_0 + \hat{B}(x)$, e imponiendo las siguientes condiciones :

$$(12)\quad \begin{pmatrix} 0 & \hat{P}^{12}(x) \\ \hat{P}^{21}(x) & 0 \end{pmatrix} = \hat{P}(x), \quad (13)\quad \hat{B}(x) = \begin{pmatrix} \hat{B}^{11}(x) & 0 \\ 0 & \hat{B}^{22}(x) \end{pmatrix}$$

Sustituyendo estas fórmulas en la ecuación

$$(*)\quad x^{-q}P'(x) = A(x)P(x) - P(x)B(x)$$

, se obtienen las cuatro condiciones :

$$(14)\quad \begin{cases} 0 = A^{11} + A^{12}\hat{P}^{21} - A_0^{11} - \hat{B}^{11} \\ x^{-q}(d\hat{P}^{12}/dx) = A^{11}\hat{P}^{12} + A^{12} - \hat{P}^{12}A_0^{22} - P^{12}\hat{B}^{22} \\ x^{-q}(d\hat{P}^{21}/dx) = A^{21} + A^{22}\hat{P}^{21} - \hat{P}^{21}A_0^{11} - \hat{P}^{21}\hat{B}^{11} \\ 0 = A^{21}\hat{P}^{12} + A^{22} - A_0^{22} - \hat{B}^{22}\,. \end{cases}$$

Recíprocamente, si $\hat{P}^{jk}(x)$ y $\hat{B}^{jk}(x)$ son matrices que satisfacen (14) , las correspondientes matrices $P(x)$ y $B(x)$ de (10 y (11) satisfacen la ecuación diferencial anterior $(*)$.

Pero $\hat{B}^{11}$ puede ser eliminada entre la primera y la tercera ecuación de (14), quedando la ecuación diferencial para $\hat{P}^{21}$ de la forma

$$(15)\quad x^{-q}(d\hat{P}^{21}(x)/dx) = A^{21} + A^{22}\hat{P}^{21} - \hat{P}^{21}A^{11} - \hat{P}^{21}A^{11}\hat{P}^{21}.$$

Una ecuación semejante se puede obtener para $\hat{P}^{12}$, de la segunda y cuarta ecuaciones.

Tal como se presentan estas ecuaciones parecen tener mas dificultades que la ecuación (✱) pues son no lineales, y además $\hat{P}^{21}(x)$ es una matriz rectangular, no necesariamente cuadrada. Sin embargo reunen ventajas desde nuestro punto de vista.

Sea w un vector p(n-p) (de dimensión p(n-p)) cuyas componentes son los elementos de $\hat{P}^{21}$ tomados en cierto orden. Entonces la ecuación (15) es de la forma $x^{-q}w' = f(x,w)$ (16), donde f(x,w) es un vector función cuadrático de las componentes de w, cuyos coeficientes admiten un desarrollo asintótico en serie de potencias de x^{-1}, cuando $x \to \infty$, en S. Se sabe por el teorema anterior que (16) se puede satisfacer formalmente por una serie de potencias $\sum_{r=1}^{\infty} w_r x^{-r}$ (17) (Observese que la suma parte de r= 1).

Un hecho importante es observar que como las series $\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}$ y $\sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r}$ satisfacen formalmente la ecuación (✱), las series en los dos miembros de la ecuación (16) deben ser idénticas.

Además, no estamos interesados en resolver la ecuación (16) completamente, sino qua solamente se desea probar que tiene una solución y que ésta, además, está representada asintóticamente por la serie (17) .

La ecuación (16) se puede escribir, poniendo $f(x,w)$ de la forma $f(x,w)= f_0(x) + F(x)w + f_2(w,x)$, donde $f_2(w,x)$ es un vector cuyas componentes son formas cuadráticas en las componentes de w. Con la notación de la ecuación (15), $F(x)w$ es la ecuación lineal $A^{22}(x)\hat{P}^{21} - \hat{P}^{21}A^{11}(x)$. Esta es una función vectorial lineal , del vector w, y con todos sus autovaleres distintos de cero, para $x=\infty$ gracias al teorema de álgebra de matrices mencionado en 2.2., pues A_0^{11} y A_0^{22} no tienen autovalores en común.Con otras palabras, la matriz $F(x)$ es no singular en $x=\infty$ Además el det $F(x)$ es también, el Jacobiano de $f(x,w)$, con respecto a w, en w= o.

Resultado fundamental

Teorema 2

Sea S un sector abierto del plano complejo x con vértice en el origen y un ángulo central positivo menor que $\pi/(q+1)$,(siendo quun entero no negativo). Sea $f(x,z)$ una función vectorial N-dimensional de x y del vector N-dimensional z , con las siguientes propiedades :

(a) Las componentes de $f(x,z)$ son polinomios en las componentes de z, z_j , $j=1,2,\ldots N$ cuyos coeficientes son funciones holomorfas de x en la región $0 < x_0 \leq |x| < \infty$, $x \in S$ (x_0 una constante).

(b) Los coeficientes del polinomio $f(x,z)$ tienen desarrollos uniformes asintóticos en serie de potencias de x^{-1}, cuando $x \to \infty$, en S.

(c) Si $f_j(x,z)$ son las componentes de $f(x,z)$, entonces todos los autovalores λ_j, $j=1,2,\ldots N$ de la matriz Jacobiana $\left\{ \lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in S}} (\partial f_j / \partial z_k /z=0) \right\}$ son diferentes de cero.

(d) La ecuación diferencial $x^{-q}y' = f(x,y)$ se satisface formalmente por una série de potencias de la forma $\sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}$.

Entonces existe, para x suficientemente grande en S, una solución $y= \phi(x)$ de la ecuación $x^{-q}y' = f(x,y)$, tal que en cada subsector propio de S, $\phi(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}$ cuando $x \to \infty$.

Aplicando este teorema, que demostraremos después, a nuestra ecuación diferencial, se obtienen los siguientes resultados.

Teorema 3

Sea S un sector abierto del plano x, con vértice en el origen y un ángulo central menor que $\pi/(q+1)$. Sea A(x) una matriz nxn, función holomorfa en S para $x_0 \leq |x| < \infty$, que admite en S un desarrollo asintótico uniforme en serie de potencias $A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}$, cuando $x \to \infty$, en S.

Suponiendo que los autovalores de A_0 se pueden separar en dos grupos $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ y $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots \lambda_n$, tales que $\lambda_j \neq \lambda_k$ cuando $j \leq p$, $k > p$; entonces existe una matriz P(x) función holomorfa para $x \in S$, $x_1 \leq |x| < \infty$, que tiene en S un desarrollo asintótico $P(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}$, con $x \to \infty$, y $\det P_0 \neq 0$, tal que la transformación $y = P(x)z$ transforma la ecuación diferencial $x^{-q}y' = A(x)y$ en la ecuación diferencial $x^{-q}z' = B(x)z$, donde B(x) tiene la forma de cajas diagonal $B(x) = \begin{pmatrix} B^{11}(x) & 0 \\ 0 & B^{22}(x) \end{pmatrix}$.

Las matrices $B^{jj}(x)$ tienen desarrollos asintóticos en serie de potencias $B^{jj}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} B_r^{jj} x^{-r}$ cuando $x \to \infty$, y los autovalores de B_0^{jj} son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$, para $j = 1$, $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots \lambda_n$ para $j = 2$.

Este teorema reduce el trabajo de resolver la ecuación diferencial (1) asintóticamente para grandes valores de x, al mismo problema para dos ecuaciones diferenciales de orden inferior. Por repetición de estas reducciones se obtiene finalmente un conjunto de problemas de la misma forma primitiva, en los cuales A_0 tiene solamente un autovalor distinto. La solución general de un problema de este tipo tiene bastante dificultad y se verá después. Ahora nos limitaremos a la discusión del caso en que en el problema de origen, todos los autovalores de A_0 son distintos. Con esta hipótesis el problema se puede reducir a una ecuación de la forma $x^{-q}z' = B(x)z$, donde $B(x)$ es diagonal. Una ecuación de este tipo puede ser resuelta casi literalmente como una ecuación escalar de la forma expuesta al principio de 2.2.. Cada matriz fundamental tiene la forma

(18) $z(x) = e^{\left(\int_{k}^{x} t^q B(t)\,dt\right)} c_1$, donde c_1 es una matriz

cuadrada de constantes, ya que si $D(x)$ es una matriz holomorfa y diagonal, entonces $d/dx\,(e^{D(x)}) = dD(x)/dx\; e^{D(x)}$.

Pero (18) puede escribirse de la forma
$z(x) = e^{(Q(x) + B_{q+1}\log x + \Psi(x) - \Gamma(a))}\, c_1$, donde
$Q(x) = \sum_{j=0}^{q} B_j x^{q-j+j}/(q-j+1)$, $\Psi(x) \sim \sum_{j=q+2}^{\infty} B_j\; x^{q-j+1}/(q-j+1)$
cuando $x \to \infty$, en S, y $\Gamma(a) = Q(a) + B_{q+1}\log a + \Psi(a)$.

Ya que la función $e^{\Psi(x)}$ tiene un desarrollo asintótico en serie de potencias por el teorema III.2.5. y como todas las matrices que aparecen en el exponente son diagonales, entonces conmutan entre sí, y por lo tanto se puede escribir $z(x) = \hat{z}(x)\; x^{B_{q+1}}\; e^{Q(x)}C$, donde C es una matriz constante arbitraria, y $\hat{z}(x)$ posee un desarrollo asintótico en serie de potencias cuyo término dominante es I.

Podemos resumir todos estos resultados en el siguiente teorema.

<u>Teorema 4</u>

Si además de las hipótesis del teorema 3, se supone que todos los autovalores λ_j, j= 1,2,. . . N, de A_0 son distintos , entonces la ecuación diferencial $x^{-q}y' = A(x)y$ tiene una matriz fundamental de la forma $y(x) = \hat{y}(x)\, x^D e^{Q(x)}$, donde $Q(x)$ esuna matriz diagonal cuyos elementos son polinomios de grado q+1 . El término dominante de Q(x) es $x^{q+1}/(q+1) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix}$ D es una matriz diagonal de constantes, y la matriz $\hat{y}(x)$ tiene en S un desarrollo asintótico $\hat{y}(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} \hat{y}_r x^{-r}$ cuando $x \to \infty$, y con det $\hat{y}_0 \neq 0$.

Si A(x) es holòmorfa en $x=\infty$ entonces cualquier sector de ángulo π (q+1) puedé ser tomado como el sector S del teorema anterior, y entonces podríamos enunciar el siguiente corolario.

<u>Corolario</u>

Si la matriz A(x) en la ecuación diferencial $x^{-q}y' = A(x)y$ es holomorfa en $x=\infty$, entonces una solución de la forma descrita en el teorema 4 , existe para cada sector S de ángulo central menor que π (q+1) .

<u>Demostración del teorema 2</u>. en el caso en que todos los autovalores son distintos.

Sean: (18) $a(x) = f(x,o)$, $A(x) = \left\{ \partial f_j / \partial z_k \Big|_{z=o} \right\}$

(19) $g(x,z) = f(x,z) - a(x) - A(x)z$, con lo que la ecuación diferencial $x^{-q}y' = f(x,y)$ queda de la forma

(20) $x^{-q}y' = a(x) + A(x)y + g(x,y)$.

Por hipótesis, la matriz $A(x)$ tiene un desarrollo asintótico uniforme $A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^{-r}$, $x \to \infty$, en S, cuyo término dominante A_o tiene los autovalores λ_j , $j = 1,2,\ldots N$. El polinomio $g(x,y)$ en las componentes de y no tiene términos lineales ni constantes. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $A_o = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$ (21) ya que podemos efectuar previamente una transformación lineal de y con una matriz constante de determinante no nulo.

Por el teorema II.2.3. existe un vector función holomorfa $\phi(x)$, en $|x| > x_o$, con $x \in S$, tal que (22) $\phi(x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}$, cuando $x \to \infty$ en S, que por la proposición III.4.5. su derivada tiene por desarrollo asintótico el que se obtiene de ϕ al derivar término a término el desarrollo asintótico de ϕ .

La transformación $u = y - \phi$ (23), cambia la ecuación diferencial (20) en (24) $x^{-q} u' = a(x) +$ $+ A(x)\phi(x) - x^{-q}\phi'(x) + A(x)u + g(x,u+\phi(x))$.

Pero como la serie $\sum_{r=1}^{\infty} y_r x^{-r}$ resuelve formalmente la ecuación (20), se tiene

$a(x) + A(x)\phi(x) - x^{-q}\phi'(x) = - g(x,\phi(x)) + b(x)$,

donde (24 b) $b(x) \sim 0$ cuando $x \to \infty$, $x \in S$, y por lo tanto , con (24) podemos escribir $x^{-q}u' = b(x) +$ $+ A(x)u + g(x,u+\phi(x)) - g(x, \phi(x))$.

Pero si $A^*(x) = \left\{ \partial g_j(x,u+\phi(x))/\partial u_k \Big|_{u=0} \right\}$ entonces $g(x,u+\phi(x)) - g(x,\phi(x)) = A^*(x)u + h(x,u)$. Como $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0$ en S, y todo $\partial g_j(x,z)/\partial z_k$ es cero, para z=o, se tienen $\lim_{x\to\infty} A^*(x) = 0$, $x \in S$. La función $h(x,u)$ es un polinomio en las componentes u_j de u, cuyos coeficientes admiten desarrollos asintóticos en serie de potencias de x^{-1} cuando $x \to \infty$ en S. Este polinomio no tiene términos constantes ni lineales en u_j, j= 1 ,2,. . . N.

Tomando ahora $A(x) + A^*(x) = B(x)$, la ecuación diferencial transformada toma la forma

(25) $x^{-q}u' = b(x) + B(x)u + h(x,u)$, donde

(26) $\lim\limits_{x \to \infty} B(x) = A_o,\ x \in S.$

El teorema quedará probado si se puede demostrar que la ecuación diferencial (25) admite una solución que es asintótica a cero, cuando $x \to \infty$ en S .

La ecuación (25) se puede escribir de la forma (27) $x^{-q}u' = A_o u + p(x,u)$, donde

(28) $p(x,u) = b(x) + (B(x) - A_o)u + h(x,u)$

Se reemplazará la ecuación (27) por una ecuación integral equivalente. Si u(x) es una solución de (27), la función p(x,u(x)) se convierte en una función conocida de x, y aplicándole la fórmula de variación de constantes se obtiene $u(x) = V(x)\ K + \int_a^x V(x)V^{-1}(t)t^q p(t,u(t))dt$ (29)

donde K es un vector constante, a es un punto fijo, y V(x) es alguna matriz fundamental de la ecuación diferencial $x^{-q}V' = A_o V$ (30) .

Inversamente, si u(x) es solución de la ecuación integral (29), entonces por diferenciación se prueba que u(x) también satisface la ecuación diferencial (27).

El miembro de la derecha de la ecuación (29) consiste en N integrales escalares. En vez de tomar el mismo camino de integración en todas ellas, se pueden elegir caminos individuales δ_j, j=1,2,. . . N, que terminan todos en el punto x, en cada una de estas integrales escalares. El conjunto de estos N caminos se denotará simbólicamente por $\Gamma(x)$.

Se puede probar otra vez por diferenciación que cualquier solución de estas ecuaciones integrales modificadas satisface la ecuación diferencial (27) .

La ecuación diferencial (30) posee una matriz fundamental particular, de la forma $V(x) = e^{x^{q+1}/(q+1)A_0}$ (31

Con la elección especial de K = 0, entonces la ecuación integral se convierte en

(32) $u(x)=\int_{\Gamma(x)} e^{(x^{q+1}-t^{q+1})/(q+1)\,A_0}\, t^q p(t,u(t))\, dt$.

El miembro de la derecha define un operador no lineal $\mathcal{P}$ de la función u(x) . Abreviadamente, se puede escribir de la forma (33) $u = \mathcal{P}(u)$.

La prueba de que esta ecuación funcional tiene una solución, y que esta solución es asintótica a cero, se basa en el método de las aproximaciones sucesivas .

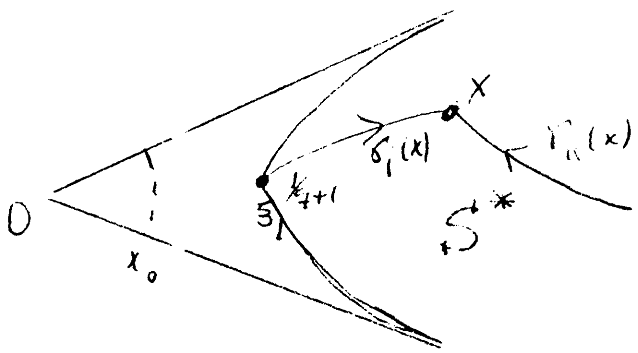
Una sucesión de vectores funciones $u_r(x)$, $r = o,1,2,\ldots$ se define por (34) $u_o \equiv 0$, $u_{r+1} = \mathcal{G} u_r$, $r \geqslant o$, y la convergencia de la sucesión se establece estimando las diferencias (35) $u_{r+1} - u_r = \mathcal{G} u_r - \mathcal{G} u_{r-1}$. Para lo cual se definen primero los caminos de integración $\Gamma(x)$.

Los caminos de integración γ_j , $j = 1,2,\ldots N$ será preciso construirlos de forma que a lo largo de ellos, la función exponencial que aparece en la ecuación (32) esté acotada. Tomemos una variable auxiliar $\tau = t^{q+1}$ (36) , y sea $\xi = x^{q+1}$ (37) . La imagen del sector S del plano-t, es un sector Σ en el plano-τ con un ángulo central menor que π.

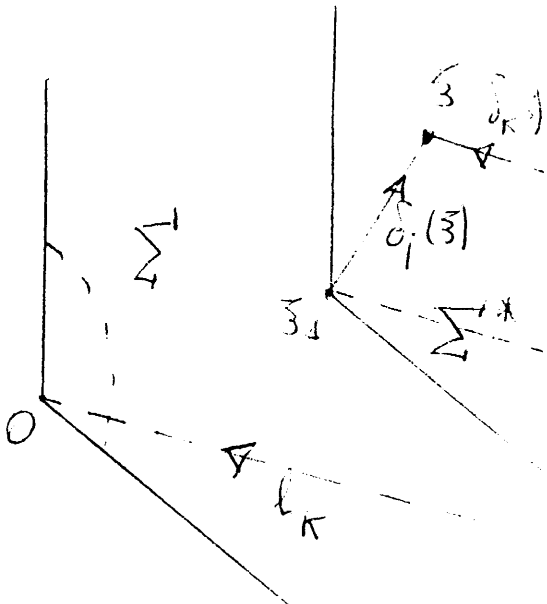
Consideremos las 2N líneas del plano-τ , en las que $Re(\tau\lambda_j) = 0$, $j = 1,2,\ldots N$. Sin perder generalidad, se puede suponer que ninguna de estas líneas está en la frontera de Σ , para lo cual bastaría tomar un subsector de S , en lugar de S, si fuese necesario.

Se dividen los autovalores λ_j, en dos clases, La primera contiene aquellos λ_j para los cuales $Re(\tau\lambda_j) < 0$, en Σ, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{j_1}$ con $0 \leq j_1 \leq n$, y el resto en la segunda clase.

Sea ζ_1 un punto en la bisectriz de Σ, tal que $|\zeta_1| > x_0^{q+1}$, y denotemos por Σ^* el sector cerrado con vértice en ζ_1 y líneas frontera paralelas a las de Σ. Entonces $\Sigma^* \subset \Sigma$ y $|\tau| > x_0^{q+1}$, para $\tau \in \Sigma^*$. Para $j \leq j_1$, y $\zeta \in \Sigma^*$, sea $\delta_j(\zeta)$ el segmento que une los puntos ζ_1 y ζ. El antecedente de $\delta_j(\zeta)$ en el plano-τ, será el camino de integración $\gamma_j(x)$, para $j \leq j_1$. Es importante observar que $Re(\tau\lambda_j)$ decrece a lo largo de $\delta_j(\zeta)$.



plano- t



plano-τ

Para cada $j > j_1$ elegimos una línea l_j desde el origen en Σ, a lo largo de la cual $Re(\tau \lambda j) > o$. Sea $\delta_j(\zeta)$ la semirecta infinita en Σ^*, desde el infinito al punto ζ, paralela a l_j. Entonces $Re(\tau \lambda_j)$ decrece a lo largo de $\delta_j(\zeta)$. De nuevo, podemos tomar el camino de integración $\gamma_j(x)$ en el plano-t, el antecedente de $\delta_j(\zeta)$, $j > j_k$.

También es importante observar que el antecedente S^* de Σ^* es una región del plano-x que está acotada por dos curvas con origen en $\zeta_1^{1/(q+1)}$ y cuyas asíntotas son las líneas fronteras de S. Esto implica que S^* contiene todos los puntos de módulo suficientemente grande, de cualquier subsector de S.

Lema 1

Sea $\lambda_o = \min|\lambda_j|$, entonces existe una constante positiva μ, independiente de λ_o, j y ζ_1, tal que (38) $Re\left((x^{q+1} - t^{q+1})\lambda_j / (q+1) \right) \leq -|x^{q+1} - t^{q+1}|\lambda_o \mu / (q+1)$ para $t \in \gamma_j(x)$, $x \in S^*$.

Demostración

Por la construcción de los caminos de integración, los números $(\tau-\zeta)\lambda_j$ estan en un subsector propio, cerrado, del semiplano derecho, si τ y ζ son imágenes de los puntos t y x del lema. Entonces, exite una constante positiva μ tal que $\cos(\arg(\zeta-\tau)\lambda_j)\leq -\mu$ es decir $\operatorname{Re}((\zeta-\tau)\lambda_j)\leq -|\zeta-\tau||\lambda_j|\mu\leq -|\zeta-\tau|\lambda_0\mu$

Lema 2

Sea $\chi(x)$ un vector funcion holomorf para $x\in S^*$, y satisfaciendo la desigualdad de la forma

(39) $\|\chi(x)\|\leq c|x|^{-m}$, donde m es un entero no negativo , y c es una constante. Entonces

(40) $\psi(x)=\int_{\Gamma(x)} e^{(x^{q+1}-t^{q+1})A_0/(q+1)}\,t^q\chi(t)dt$ es holomorfa en S^*, y satisface una desigualdad de la forma : (41) $\|\psi(x)\|\leq Kc|x|^{-m}$, donde K es una constante, independiente de $\chi(t)$, pero dependiendo de m.

Demostración

Si ψ_j , j=1,2,. . . N son las componentes de ψ, bastará probar que $|\psi_j(x)|\leq Kc|x|^{-m}$, para j=1,2,...N

Las transformaciones (36) y (37) cambian (40) en la ecuación, con notación escalar ,

$$\psi_j(x)=\frac{1}{q+1}\int_{\delta_j(\zeta)} e^{(\zeta-\tau)\lambda_j/(q+1)}\chi_j(\tau^{1/(q+1)})d\tau .$$

Pero por el lema anterior, y la hipótesis (39, se tiene

$$(41b)\quad |\Psi_j(x)| \leq \frac{c}{q+1}\int_{\delta_j(\zeta)} e^{-|\zeta-\tau|\lambda_0\mu/(q+1)}\,|\tau|^{-m/(q+1)}\,|d\tau|$$

Se considera primero, el caso $j \leq j_1$. Si se toma $\tau = \zeta - \rho e^{i\alpha}$, donde $\rho = |\zeta - \tau|$, y α es el ángulo direccional del camino $\delta_j(\zeta)$, la desigualdad anterior queda de la forma :

$$|\Psi_j(x)| \leq \frac{c}{q+1}\int_0^{|\zeta-\zeta_1|} e^{-\rho\lambda_0\mu/(q+1)}\,|\tau|^{-m/(q+1)}\,d\rho$$

Se divide el camino de integración de la desigualdad anterior, en dos segmentos de igual longitud. Para $\rho \leq |\zeta-\zeta_1|/2$ la desigualdad $|\tau| \geq |\zeta|/2$ se tiene como una simple consideración geométrica. Esta parte de la integral contribuye en menos que

$$(42)\quad \frac{c}{q+1}\,2^{m/(q+1)}\,|\zeta|^{-m/(q+1)}\int_0^{\infty} e^{-\rho\lambda_0\mu/(q+1)}\,d\rho =$$

$$= c\,2^{m/(q+1)}\,\lambda_0^{-1}\mu^{-1}\,|\zeta|^{-m/(q+1)} .$$

Si $\rho > |\zeta-\zeta_1|/2$, se reemplaza $|\tau|$ por su cota inferior $|\zeta_1|$ y esta parte contribuye en menos que

$$(43)\quad \frac{c}{q+1}\,|\zeta_1|^{-m/(q+1)}\int_{|\zeta-\zeta_1|/2}^{\infty} e^{-\rho\lambda_0\mu/(q+1)}\,d\rho \leq$$

$$\leq \frac{c}{\lambda_0 \mu} |\zeta_1|^{-m/(q+1)} e^{-|\zeta-\zeta_1|\lambda_0\mu/2(q+1)} \leq 2^{m/(q+1)} \frac{c}{\lambda_0\mu} |\zeta|^{-m/(q+1)}$$

pues $|\zeta_1| \leq |\zeta|/2$.

Esto prueba que la última expresión es siempre una $O(\zeta^{-m/(q+1)})$.

Si $|\zeta-\zeta_1| > |\zeta|/2$, entonces el miembro de la derecha de la desigualdad (43) es menor que

$$\frac{c}{\lambda_0\mu}|\zeta_1|^{-m/(q+1)} e^{-|\zeta|\lambda_0\mu/4(q+1)} \leq$$

$$\leq \frac{c}{\lambda_0\mu}|\zeta_1|^{-m/(q+1)}(4m/\lambda_0\mu)^{m/(q+1)} e^{-m/(q+1)}|\zeta|^{-m/(q+1)}$$

Para obtener la última desigualdad basta multiplicar y dividir por $|\zeta|^{m/(q+1)}$ y calcular el máximo de la expresión $e^{-|\zeta|\lambda_0\mu/4(q+1)}|\zeta|^{m/(q+1)}$.

Sumando estas cantidades se ha obtenido la estimación deseada para la integral, siempre que $j \leq j_1$.

Sea $j > j_1$ se probará primero la existencia de un número positivo p, independiente de j, tal que en $\delta_j(\zeta)$ se verifique (44) $|\tau| \geq p(\zeta)$, $\tau \in \delta_j(\zeta)$.

En efecto, sea P el punto donde corta la perpendicular trazada desde el origen a la recta de la cual forma parte $\delta_j(\zeta)$. Si P no está en $\delta_j(\zeta)$, entonces $|\tau| > |\zeta|$, para $\tau \in \delta_j(\zeta)$. Si P pertenece a $\delta_j(\zeta)$, el ángulo $0\zeta P$ es númericamente no menor que el mas pequeño de los ángulos positivos que forma l_j con las rectas frontera de Σ · Sea β el mínimo de estos ángulos para $j > j_1$. Entonces $|\tau| \geq \overline{OP} \geq |\zeta|$ sen β, con lo cual se ha probado la desigualdad (44).

Sustituyendo (44) en (41b), y llamado $\rho = |\zeta - \tau|$ se tiene

$$|\Psi_j(x)| \leq \frac{c}{q+1} \rho^{-m/(q+1)} |\zeta|^{-m/(q+1)} \int_0^\infty e^{-\rho\lambda_0 \mu/(q+1)} d\rho =$$

$$= \frac{c}{q+1} p^{-m/(q+1)} |\zeta|^{-m/(q+1)}$$. Con lo cual se ha completado la prueba de la desigualdad (41) .

Para probar que $\Psi(x)$ es holomorfa en S^*, basta probar que las integrales $\int_{\delta_j(\zeta)} e^{-\tau\lambda_j/(q+1)} \Lambda_j(t) d\tau$ son funciones holomorfas de ζ en Σ'^* . Esto es obvio para $j \leq j_1$. Y para $j > j_1$ es igual de sencillo pues el integrando decrece exponencialmente para grandes τ .

Nota : Mientras K depende de ζ_1, debe ser no creciente si $|\zeta_1|$ es creciente .

Sea S' un subsector cerrado del sector S del teorema 2, y ahora se repite la construcción del sector S^*, pero con S' en lugar de S, obteniendo entonces una región S'^*. Tomando S' próximo a S, se puede conseguir que los caminos $\Gamma(x)$ estén en S'^*, siempre que lo esté x.

Sea m un entero positivo, aplicando (24b), existe una constante C dependiendo de m tal que $\|b(x)\| \leqslant C|x|^{-m}$, $x \in S'^*$ (45) .

Por el lema 2 y por (34), existe una constante K, tal que $\|u_1(x)\| \leqslant K|x|^{-m}$ (46) .

Ahora evaluamos el miembro de la derecha de la relación (35), por inducción. En vista de la definición del operador $\mathcal{G}$ y de la función $p(x,u)$ en (28), se necesita acotar la cantidad $\|(B(x)-A_0)(z^{2)}-z^{1)}) + h(x,z^{2)}) - h(x,z^{1)})\|$, donde $z^{1)}$ y $z^{2)}$ son vectores . Por ser $\lim_{x \to \infty} B(x) = A_0$, $x \in S$, y $h(x,z)$ un polinomio en z, sin términos lineales, se tiene, para $x \in S'^*$ y para $\|z^{i)}\| \leqslant z_0$, $i=1,2$, z_0 una constante, que

(47) $\|(B(x)-A_0)(z^{2)}-z^{1)}) + h(x,z^{2)})-h(x,z^{1)})\| \leqslant \leqslant \gamma \|z^{2)}-z^{1)}\|$, donde la constante γ puede ser tomada

tan pequeña como se quiera, tomando $!\xi_1!$ suficientemente grande y z_0 suficientemente pequeño. Pero gracias a la nota, con la cual el que $!\xi_1!$ crece no afecta a la constante K, podemos suponer que (48) $\delta < K^{-1}$.

Haciendo crecer x_0, si es necesario, pero tomando δ y K fijos se puede conseguir que (49) $CK!x!^{-m}/(1-\delta K) \leq z_0$, para todo x de S'^*. Entonces se probará que

(50) $!!u_{r+1}-u_r!! \leqslant \delta^r K^{r+1} C!x!^{-m}$, $r=0,1,2,. . . , x \in S'^*$

y (51) $!!u_{r+1}!! \leqslant CK!x!^{-m}/(1-\delta K)$, $r=0,1,. . . , x \in S'^*$

Teniendo en cuenta (46) y que $u_0=0$, las desigualdades son ciertas para r=0. Supongamos que son ciertas para todo $r \leqslant j-1$, j arbitrario, entonces por (49), se puede aplicar la desigualdad (47) con $z^{1)} = u_{j-1}$, $z^{2)} = u_j$. En consecuencia $\mathcal{G}u_j-\mathcal{G}u_{j-1}$ es una integral de la forma (40), en la que $\chi(x)$ satisface, por la fórmula (47) y por la (50) para r=j-1, la desigualdad $!!\chi(x)!! \leqslant \delta^j K^j C!x!^{-m}$.

El lema 2 establece entonces la validez de (50) para r=j. La validez de (51) para r=j está derivada de (50) para $r \leq j$ como sigue :

$$\|u_{j+1}\| = \Big\|\sum_{k=0}^{j}(u_{k+1}-u_k)\Big\| \leq \sum_{k=0}^{j}\|u_{k+1}-u_k\| \leq$$

$$\leq CK|x|^{-m}\sum_{k=0}^{j}\gamma^k K^k < CK|x|^{-m}(1-\gamma K)^{-1} .$$

Veamos ahora que $\lim_{r\to\infty} u_r(x) = u(x)$ .Las fórmulas (48) y (50) implican qud la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\|u_{r+1}-u_r\|$, para $x \in S'^{*}$, está dominada por una serie geométrica convergente. Por lo tanto, la serie $\sum_{r=0}^{\infty}(u_{r+1}-u_r)$ converge uniformemente en S'^{*}, es decir $\lim_{r\to\infty} u_r = \lim_{r\to\infty}\sum_{s=0}^{r-1}(u_{s+1}-u_s)$ existe y es holomorfa en S'^{*}.

Para probar que $u(x)$ resuelve la ecuación integral $u=\mathcal{G}u$, es preciso probar que $\lim_{r\to\infty}\mathcal{G}u_r = \mathcal{G}\lim_{r\to\infty} u_r$, pero esto se deriva de la uniformidad de la convergencia y de la desigualdad (38) .

Finalmente, la fórmula (51) dice que $u(x) \sim 0$, cuando $x \to \infty$, con m arbitrario. La región S^{*} depende de la elección de x_1 con lo cual depende de la elección de m. Esto sin embaargo, no tiene importancia pues $u(x)$ es independiente de m, y existe en una región que no depende de m. Con lo que el teorema 2 está probado, bajo la hipótesis de que los autovalores sean diferentes.

El teorema 2 tiene interés, no sólo para ecuaciones diferenciales lineales, sino también para obtener resultados con ecuaciones diferenciales no lineales. Para esta conexión se puede reemplazar la hipótesis restrictiva (a) de que $f(x,z)$ debe ser un polinomio en las componentes de z, por otra mucho mas débil, que $f(x,z)$ sea holomorfa en estas componentes para $z=0$.

3.- Caso general .

3.1. Soluciones para un punto singular regular

Sea la ecuación diferencial $xy'=A(x)y$, con $A(x)$ holomorfa en $x=o$. Sea T una matriz constante tal que $J= T^{-1}A(o)T$, es su matriz de Jordan. Si los autovalores de $A(o)$ no difieren en un entero positivo, en el apartado anterior se ha construido una solución para la ecuación diferencial. En el caso general, comenzaremos el análisis, cambiando la ecuación diferencial en $xz'= B(x)z$, por la transformación $y=Tz$, tal que $B(o) = J$. Se trata de generalizar la idea del apartado anterior.

Si λ es un autovalor de J que excede de uno de los otros en un entero positivo, se puede, sin perder generalidad, suponer que las cajas de Jordan correspondientes a este autovalor son las últimas en J. Si p es la multiplicidad de λ, se hace una partición de B(x) con (n-p) filas y columnas, de forma que

$$B(x) = \begin{pmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} + x\Psi_{11}(x) & x\Psi_{12}(x) \\ x\Psi_{21}(x) & J_{22} + x\Psi_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

donde las matrices $\Psi_{jk}(x)$, j,k=1,2 son holomorfas en x=o. J_{ii} , i=1,2 son las matrices de Jordan, y la segunda de ellas tiene únicamente como autovalor a λ en la diagonal.

Ahora efectuamos la transformación de "recorte" en la ecuación diferencial con z=S(x)w, donde

$$S(x) = \begin{pmatrix} I_{n-p} & 0 \\ 0 & xI_p \end{pmatrix}.$$

La matriz C(x) de la ecuación diferencial resultante $xw' = C(x)w$, tiene la forma $C(x) = S^{-1}(x)B(x)S(x) -$

$$- xS^{-1}(x)S'(x) = \begin{pmatrix} J_{11} + x\Psi_{11}(x) & x^2\Psi_{12}(x) \\ \Psi_{21}(x) & J_{22} - I_p + x\Psi_{22}(x) \end{pmatrix}$$

La matriz C(o) tiene los mismos autovalores que J, excepto el último autovalor λ que está disminuido en una unidad.

Después de un número finito de pares de transformaciones constantes y de "recorte", reducimos la ecuación diferencial a otra cuya matriz en el origen no tiene autovalores que difieran en un número entero. Entonces el teorema 1 del apartado anterior se puede aplicar, y por lo tanto también es cierto el teorema 5.

Si las matrices de coeficientes en la ecuación diferencial $xy'=A(x)y$ tienen series no convergentes, pero que son desarrollos asintóticos, cuando $x \to 0$ en algún sector S, el teorema 3 no es aplicable y del teorema 5 sólo queda el débil resultado de que la ecuación diferencial está formalmente satisfecha por una expresión de la forma $(\sum_r P_r x^r) x^G$, ó si transformamos la ecuación diferencial tomando $y= Px^G$, en la ecuación $xP'=A(x)P - PG$, la serie de potencias $\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^r$ es una solución formal. Se trata de probar que esta serie de potencias en S es la representación asintótica de una verdadera solución de la ecuación .

<u>Teorema 1</u>

Como la ecuación diferencial $xV' = F_o V$ tiene una matriz fundamental $V=x^{F_o}$, la fórmula de variación de parámetros dá una ecuación integral (5) $z(x)=x^{F_o}\int_0^x t^{-F_o}(a(t)t^{-1}+\tilde{F}(t)z(t))dt$ para z, cualquier solución contínua de (5) satisface (4).

Construimos una solución de (5) iterativamente, tomando $z_o(x) \equiv 0$, y definiendo $z_{r+1}(x)$ recursivamente como el valor del miembro de la derecha de (5), con $z(t)$ reemplazada por $z_r(t)$. Inmediatamente se vé que

(6) $\|z_1(x)\| \leq c|x|^m$, $x \in S$, $|x| \leq x_o$, ya que $a(x) \sim 0$ en S. El entero positivo m es arbitrario, pero la constante c depende de m.

Para asegurar que $z_r(x)$ existe y es holomorfa en S, elegimos m suficientemente grande para que sea (7) $\lim_{x \to o} x^{mI-F_o} = o$ y observamos que si a y b son números cualesquiera y M es una matriz cualquiera, se verifica que $(ab)^M = a^M b^M$ (8).

Si $\phi(x)$ es un vector función holomorfa para el cual se verifica que $\|\phi(x)\| \leq K|x|^m$, $|x| \leq x_o$, $x \in S$, K constante, entonces se sigue que

(9) $\|x^{F_o}\int_0^x t^{-F_o}\tilde{F}(t)\phi(t)dt\| = \|x\int_0^1 \rho^{-F_o}\tilde{F}(x\rho)\phi(x\rho)d\rho\| \leq$

$\leq K\|x\|^{m+1}\int \|\rho^{mI-F_o}\tilde{F}(x\rho)\|d\rho \leq K K_1\|x\|^{m+1}$ donde la constante K_1 depende de m y F(x), pero no de $\phi(x)$.

En base a esta desigualdad, una simple inducción prueba que tomando (10) $z_{r+1}(x)-z_r(x) = x^{F_o}\int_0^x t^{-F_o}\tilde{F}(t)(z_r(t)-z_{r-1}(t))dt$, $r>o$ y aplicando (6) se verifican las relaciones

(11) $\|z_{r+1}-z_r\| \leq cK_1^r \|x\|^{m+r}$, $r\geq 0$, $\|x\|\leq x_o, x\in S$

(12) $\|z_r\| \leq c\|x\|^m/(1-K_1\|x\|)$, $r\geq 0$, $\|x\|\leq x_o < 1/K_1, x\in S$.

De las cuales se sigue inmediatamente, por el argumento standard del método de iteración de Picard que la sucesión $z_r(x)$ tiende a una función holomorfa z(x), uniformemente en S, cuando $r\to\infty$, y que z(x) satisface la ecuación integral (5), y $z(x)\sim 0$ en S, pues m estaba elegido suficientemente grande, lo que prueba el teorema.

Como una consecuencia, se puede ahora contestar a la pregunta de la forma asintótica de la solución de la ecuación diferencial.

Teorema 2

Teorema 2

Sea $A(x)$ una matriz holomorfa para todos los puntos de un sector S, con $0 < |x| \leq x_0$ y poseyendo en este conjunto, el desarrollo asintótico $A(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r$, con $x \to 0$ en S. Entonces la ecuación diferencial $xy' = A(x)y$ posee una matriz fundamental de la forma $Y(x) = P(x)x^G$, donde G es una matriz constante y P(x) admite un desarrollo en serie de potencias, cuando $x \to 0$ en S. Si en particular, $A_0 = 0$, entonces $G = 0$, y $P(0) = I$.

3.2. Punto singular irregular

Se trata de probar el teorema 2 del apartado 2, en el caso general. Las modificaciones en la demostración, cuando la matriz $A(\infty)$ tiene raices múltiples no afectan a la esencia de los razonamientos del apartado 2. Las diferencias nacen del hecho de que la forma de Jordan J de $A(\infty)$ puede ser no diagonal. En general se tendrá que $J = D + H$, donde D es una matriz diagonal formada por los autovalores de $A(\infty)$ y $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_s$ es una suma directa de matrices nilpotentes. Se observa que D y H commutan.

Con esta definición de J, la primera diferencia con el razonamiento de la demostración del teorema está en que se trata de la matriz $e^{((x^{q+1}-t^{q+1})D/(q+1))}$ y no de la $e^{((x^{q+1}-t^{q+1})\Lambda_0/(q+1))}$, cuyos términos diagonales son $e^{(x^{q+1}-t^{q+1})\lambda_j/(q+1)}$. El resto de la demostración hasta el lema 2 sigue siendo literalmente válida en el caso general.

Sin embargo, la demostración del lema 2 debe ser modificada. Sea $\Delta(\zeta)$ el conjunto de caminos $\delta_j(\zeta)$. En términos de ζ y τ en lugar de x y t el segundo miembro de la igualdad 2.2.(40), queda de la forma

$$(11)\quad \psi(x) = \frac{1}{q+1}\int_{\Delta(\zeta)} e^{(\zeta-\tau)D/(q+1)}e^{(\zeta-\tau)H/(q+1)}\chi'(\tau)^{q+1}d\tau$$

Por el lema 1, la norma del integrando no excede a (12) $e^{-|\zeta-\tau|\lambda_0\mu}\,\|e^{(\zeta-\tau)H/(q+1)}\|\,\|\chi'(t)T\|$. Pero, $e^{(\zeta-\tau)H/(q+1)}$ es un polinomio en $\zeta-\tau$, y por lo tanto acotado por una exponencial de exponente positivo tan pequeño como se quiera, luego existe una constante C tal que la cantidad (12) es menor que $Ce^{-|\zeta-\tau|\lambda_0\mu^*}\|\chi(t)\|$, donde μ^* es una constante con $0<\mu^*<\mu$.

El número C depende de μ^*. Entonces se obtiene de nuevo la desigualdad, salvo el factor $1/(q+1)$, que ha sido reemplazado por el factor $C/(q+1)$, posiblemente mayor, y μ por la constante μ^*, posiblemente menor.

A partir de este momento la demostración del teorema es literalmente la misma que se expuso.

Veamos ahora la forma de aplicarlo para obtener soluciones asintóticas para una singularidad irregular en el caso general.

Por medio de repetidas aplicaciones del teorema 3 del apartado 2, una ecuación diferencial $x^{-q}y'=A(x)y$, $q\geq 0$ se puede reducir a un conjunto de ecuaciones diferenciales de la misma forma, en cada una de las cuales los términos dominantes del desarrollo de $A(x)$ tienen sólo un autovalor distinto. Supondremos pues, que la ecuación diferencial $x^{-q}y'= A(x)y$ es la resultante de esta reducción y que $A(x)\sim\sum_{r=0}^{\infty}A_r x^{-r}$, $x\to\infty$, $x\in S$ cuya matriz A_0 tiene sólamente un autovalor distinto. Si $A(x)$ es holomorfa en el ∞, el sector S puede ser cualquier sector de ángulo central menor que $\pi/(q+1)$. Probaremosmos sin perder generalidad, que se puede suponer que el único autovalor de A_o es el cero. En efecto, si λ es el autovalor de A_o, la transformación $y=ze^{\lambda x^{q+1}/(q+1)}$ cambia la ecuación $x^{-q}y'=A(x)y$, en $x^{-q}z'=(A(x)-\lambda I)z$, el término dominante de la matriz $A(x)-\lambda I$, es $A_o-\lambda I$, que es nilpotente.

Además, se puede suponer que la matriz nilpotente A_o está en la forma de Jordan. Esto no resta generalidad, pues siempre es posible una transformación lineal con una matriz de coeficientes constantes.

Finalmente, se observa quesi todos las cajas de Jordan de la matriz nilpotente A_o tienen dimensión uno, entonces $A_o = 0$ y el problema se puede reducir a otro con un valor de q inferior, eliminando una potencia de x^{-1} en la ecuación. Con lo que se ha obtenido otro nuevo problema con $A_o \neq 0$, ó si el nuevo valor de q es negativo, el problema pasa a ser resuelto, pues deja de ser el punto singular irregular. Por consiguiente, se puede suponer que al menos una de las cajas de Jordan de A_o, tiene dimensión mayor que uno.

Entonces, A_o se puede tomar como suma directa de matrices nilpotentes H_i, es decir

(13) $A_o = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_s$, donde al menos un H_k tiene dimensión mayor que uno.

El método de simplificación a que conduce el teorema 1 del apartado 2.3. puede ser usado todavía con mas amplitud . Transformamos la ecuación diferencial $x^{-q}y'=A(x)y$, $q \geq 0$ por medio de $y= P(x)z$ en la ecuación diferencial $x^{-q}z'=B(x)z$, lo que conduce a las fórmulas de recursión $A_oP_o - P_oB_o = 0$

$$A_oP_r - P_rB_o = \sum_{s=0}^{r-1} (P_sB_{r-s} - A_{r-s}P_s) -(r-q-1)P_{r-q-1} \;, \; r > 0$$

y $r-q-1 > 0$. Con lo que de nuevo se tiene $B_o=A_o$, $P_o= I$ y se pueden escribir las otras en la forma

(14) $A_oP_r - P_rA_o = B_r - K_r$, $r>0$.

Ahora son necesarias nuevas consideraciones, ya que A_o sólo tiene un autovalor que es cero y no será siempre posible elegir todas las B_r, $r>0$ iguales a cero, ó en bajas diagonales.

Ahora dividimos cada ecuación (14) en cajas del mismo orden que las de la representación (13) de A_o, y llamamos a estas cajas P_r^{jk} , con $j,k =1,2, \ldots s$.

Entonces cada relación (14) es equivalente a las s^2 relaciones siguientes

(15) $H_j P_r^{jk} - P_r^{jk} H_k = B_r^{jk} - K_r^{jk}$, $j,k=1,2,\ldots s$, $r>0$.

Por el mismo teorema del álgebra de matrices que se cita en el apartado 2.2. , las correspondientes ecuaciones homogéneas tienen soluciones no triviales, por lo que cada ecuación (15) puede ser resuelta solamente si las matrices B_r^{jk} satisfacen alguna condición restrictiva. Veamos que el lema siguiente nos dá esta condición .

Lema 1

Sean H y K matrices nilpotentes de órdenes h y k, respectivamente. Sea M una matriz de h filas y k columnas, de las cuales las primeras h-1 filas son vectores constantes, mientras que los elementos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ de la última fila son variables. Entonces los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pueden ser determinados unívocamente de manera que la ecuación $HX-XK = M$ pueda ser resuelta con la matriz X de orden hxk .

Demostración

Sea $X = (x_{ij})$. Entonces $HX - XK$ =

$$\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2k} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nk} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1,k-1} \\ 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2,k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdot & \cdots & x_{n-1,k-1} \\ 0 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{n,k-1} \end{pmatrix}$$

De las hk ecuaciones escalares representadas por HX-XK = M, primero resolvemos las h-1 elementos de la primera columna $x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{n1}$. Estos valores están unívocamente determinados. Esto determina también, los últimos h-1 elementos de la segunda columna de XK. Por lo tanto, los elementos $x_{32}, x_{4,2}, \ldots, x_{n2}$ de la segunda columna de HX pueden ser hallados de forma única. Procediendo de esta forma, todas las ecuaciones correspondientes a los elementos de la diagonal y los de debajo de ésta, pueden ser satisfechas, exceptuando los de la última fila. La última fila de HX-XK tiene entonces ciertos valores numéricos, los cuales determinan los $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$.

Ahora se eligen $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1,k-1}$ arbitrariamente y determinamos el resto de los elementos de la primera fila de HX. Esto completa la determinación de los elementos en la segunda fila de XK, y esta información será utilizada para calcular el resto de los elementos de la segunda fila de HX, y así hasta que sean resueltas todas las hk ecuaciones. Con lo que se ha terminado la demostración del lema.

Aplicando este lema a las ecuaciones (15), puesto que todas las filas, exceptuando la última de B_r^{jk} pueden ser elegidas arbitrariamente, las tomamos iguales a cero.

La serie $\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}$ determinada resolviendo sucesivamente para r=1,2,... todas las ecuaciones (15), será en general divergente, pero por el teorema II.2.3. existe una matriz función holomorfa P(x), tal que $\sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}$ es su desarrollo asintótico, para x tendiendo a infinito. Con lo cual hemos probado el siguiente lema.

Lema 2

Existe una matriz función P(x) holomorfa en S, para $|x| > x_0$, con el desarrollo asintótico $P(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r x^{-r}$ cuando $x \to \infty$, en S, tal que la transformación y=P(x)Z cambia la ecuación diferencial $x^{-q}y'=A(x)y$, con una matriz nilpotente $A(\infty)$, en la ecuación diferencial $x^{-q}z'=B(x)z$ donde b(x) tiene las siguientes propiedades :

1) $B(x) \sim \sum_{r=0}^{\infty} B_r x^{-r}$, $x \to \infty$, $x \in S$.
2) $B_o = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_s$ (las H_j son matrices nilpotentes)
3) Los únicos elementos distintos de cero, en B_r con $r > 0$ están en la fila correspondiente a la última fila de las cajas H_j , j= 1,2,. . . .s.

Sin embargo, aunque ciertas filas tienen sólamente ceros en las matrices B_r, esto no quiere decir que la correspondiente matriz B(x) tenga sólamente ceros en estas filas. Lo que se ha probado es que los correspondientes elementos de B(x) son asintóticamente equivalentes a cero, cuando x tiende a infinito en S.

Veamos ahora una nueva reducción, para la cual supondremos que la ecuación diferencial original $x^{-q}y'= A(x)y$ verifica las condiciones descritas en el lema 2.

La experiencia con el problema de puntos singulares regulares sugiere el empleo de otra nueva transformación para reducir el problema, pero que contiene potencias fraccionarias de x.

Transformamos la ecuación diferencial $x^{-q}y'=A(x)y$ por medio de (16) $y=S(x)z$, donde (17) $S(x)=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & x^{-g} & & \\ & & x^{-2g} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & x^{-(n-1)g} \end{pmatrix}$ con una constante positiva indeterminada g, en (18) $x^{-q}z'= B(x)z$. El término dominante de la matriz $B(x)=S^{-1}(x)A(x)S(x)- x^{-q}S^{-1}(x)S'(x)$ depende del valor de g. Para estudiar esta dependencia vamoa a escribir los elementos de A(x) que no son asintóticamente equivalentes a cero en la forma (19) $a_{jk}(x) = x^{-\alpha_{jk}}a^*_{jk}(x)$, $a^*_{jk}(\infty)\neq 0$, $\alpha_{jk}\geqslant 0$. Al menos un $\alpha_{j,j+1}$ es cero, $j=1,2\ldots n-1$, y todos los α_{jk} son enteros positivos, con $k\neq j+1$, ya que A_0 es una matriz de Jordan no nula. Los elementos correspondientes de B(x) son (20) $b_{jk}(x)= x^{-\alpha_{jk}+(j-k)g}a^*_{jk}(x)+$ $+\delta_{jk}(j-1)gx^{-q-1}$, donde δ_{jk} denota los elementos de la matriz identidad. Si $a_{jk}(x)\sim 0$, entonces $b_{jk}(x)\sim 0$, excepto para $j=k\neq 1$, en cuyo caso $b_{jj}(x) = x^{-q-1}b^*_{jj}(x)$, con $b^*_{jj}(\infty) \neq 0$. Estos b_{jk} que no son asintóticamente equivalentes a cero pueden escribirse en la forma $b_{jk}(x) = x^{-\beta_{jk}(g)}b^*_{jk}(x)$, con $b^*_{jk}(\infty) \neq 0$.

Los $\beta_{jk}(g)$ son funciones lineales con coeficientes enteros y estan dentro de las cuatro clases :

1) $k > j+1 \Rightarrow \beta_{jk}(g) = \alpha_{jk} + (k-j)g$

2) $K = j+1 \Rightarrow \beta_{jj+1}(g) = \alpha_{jj+1} + g$, y $\beta_{jj+1}(g) = g$ para al menos un j.

3) $K = j \Rightarrow$ Los $\beta_{jj}(g)$ son independientes de g y positivos, es decir, $\beta_{jj}(g) = \beta_{jj} \geq 1$. Con mas precisión, $\beta_{11} = \alpha_{11}$, si α_{11} está definida ; además $b_{11}(x) \sim 0$.

$$\beta_{jj} = \begin{cases} \min\ (\alpha_{jj},\ (q+1))\ , \text{ para } j > 1, \text{ si } \alpha_{jj} \text{ está def.} \\ q+1\ , \text{ para } j > 1, \text{ si } a_{jj} \sim 0. \end{cases}$$

Se observa que β_{jj} está definido para todo $j > 1$, aún cuando α_{jj} no esté definido, es decir $a_{jj}(x) \sim 0$.

4) $k < j \quad \beta_{jk}(g) = \alpha_{jk} - (j-k)g$, $\quad \alpha_{jk} > 0$.

Se trata de determinar el exponente g. La construcción es más fácil explicándola gráficamente. Se considera el primer cuadrante de un sistema coordenado ortogonal de abscisa g y ordenada β, en el cual hemos representado las rectas $\beta = \beta_{jk}(g)$. Entre las rectas correspondientes a $k > j$, está en particular la recta $\beta = g$. Todas las demás para $k > j$, están por encima de ella en este primer cuadrante. Las rectas $\beta = \beta_{jk}(g)$, para $k \leq j$ tienen pendiente no positiva y cortan al eje β en su zona positiva. Entonces existe la abscisa $g_0 > 0$ mas pequeña de las intersecciones de este último grupo de rectas ($k \leq j$) con la recta $\gamma = g$. La ordenada correspondiente a este punto es también g_o.

Se toma $g = g_o$ para nuestra transformación. En principio $g_o \in \mathbb{Q}$. Multiplicando la ecuación diferencial (18) por x^{g_o}, la matriz $x^{g_o}B(x)$ en el miembro de la derecha tiene la propiedad de que el $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \in S}} x^{g_o}B(x) = B_o^*$ existe y es diferente de A_o. En efecto, gracias a la elección de g_o, la matriz B_o^* tiene al menos un elemento distinto de cero debajo ó en la diagonal principal. Por encima de la diagonal es igual a A_o.

La ecuación diferencial que se tiene ahora será (21) $x^{-(q-g_o)} z' = x^{g_o} B(x)\, z$.

Para volver a tener un problema con una serie de potencias enteras hacemos el cambio de la variable independiente (22) $x = \alpha t^p$, $\alpha = p^{1/(g_o-q-1)}$, donde p es el entero menor positivo tal que $g_o p$ es un número entero. Entonces, resulta la ecuación diferencial de la forma (23) $t^{-h} dz/dt = C(t) z$. El exponente h es (24) $h = p(q+1-g_o)-1$ y $C(t)$ tiene un desarrollo asintótico $C(t) \sim \sum_{r=0}^{\infty} C_r t^{-r}$, $t \to \infty$, válido en el sector obtenido en el lema 2 para la transformación (22). La rama de la función multivalente $x^{1/p}$ puede ser elegida como se quiera . La paralela superior de la diagonal de C_o tiene los mismos elementos que A_o gracias a la elección de α em (22) .

Si $h < 0$, el problema se ha resuelto ya que ha dejado de ser un punto singular irregular.

Si $h \geq 0$, la matriz C_o tendrá, normalmente, mas de un autovalor distinto y entonces el problema puede ser reducido a un conjunto de problemas similares de orden menor, aplicando el teorema 3 del apartado 2.3.

Por otra parte, C_o puede participar con A_o de la propiedad de tener un sólo autovalor. Será necesario estudiar con mas detalle la estructura de C_o. Para lo cual vamos a escribir C_o en cajas, forma inducida por la descomposición de $A_o = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_s$.

Sin perder generalidad, podemos suponer que las dimensiones m_j de estas cajas estan en un orden ascendente $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_s$.

Si C_{jk} , $jk = 1,2,\ldots s$ son las correspondientes cajas de C_o, sabemos, por lo que acabamos de hacer, que $C_{jk}=0$ cuando $k>j$, y que los elementos de la paralela superior a la diagonal de C_{jj} son iguales a uno.

Lema 3

Si todos los autovalores de C_o son iguales al mismo número λ, entonces C_o es nilpotente y todas las $C_{jj}=H_j$, ó g_o esun entero.

Demostración

Si g_o es no entero, entonces no puede ser igual a ninguno de los exponentes β_{jj}, los cuales son enteros positivos. En este caso C_o tiene sólo elementos cero en la diagonal. Por lo tanto, la traza de C_o es cero, por lo que $\lambda = 0$, es decir, C_o es nilpotente. Como los autovalores de C_{jj} son también autovalores de C_o, todas las C_{jj} son nilpotentes. Por otra parte, cualquier elemento distinto de cero de C_{jj} puede estar debajo de la diagonal pero en la última fila, por la transformación preliminar del lema 2. Esto no puede suceder si se sabe que C_{jj} es nilpotente, por la forma del polinomio característico de C_{jj}. Luego $H_j = C_{jj}$, y el lema queda probado.

Si el número g_o es un entero, entonces $h=q-g_o<q$, es decir, el problema ha sido reducido a uno de menor orden. Entonces, el método de reducción por cajas que ya se ha usado, en combinación con el método empleado aquí, intentan ambos reducir el orden del problema, a no ser que en las repetidas aplicaciones de estas técnicas se llegue a un problema de la forma (23), para el cual C_o tiene sólamente un autovalor y el número g_o de la transformación sea un número entero. Se trata de probar ahora que cada una de estas situaciones a las que se ha llegado puede ser resuelta asintóticamente. Este es el caso más molesto de analizar. A partir del lema 3 podemos caracterizarlo así : C_o es nilpotente, y todas las C_{jj} son matrices nilpotentes H_j. Si C_o tiene estas propiedades diremos que el problema (23) es del tipo (E).

Se trata ahora de probar que si repetimos este proceso de transformaciones se obtiene otra vez un problema del tipo (E), entonces después de un número finito de pasos llegamos a que C_o tiene sólamente una caja de Jordan , es decir s=1. Veamos primero que si s=1, la solución de un problema del tipo (E) es casi inmediata. La matriz C_o es nilpotente. Usaremos una vez mas el método del recorte. Si el valor hallado para g_o es entero, el problema ha sido reducido a un orden menor. Si g_o es una fracción y la nueva matriz tiene más de un autovalor el problema puede ser dividido en problemas de orden menor. La posibilidad de que g_o sea una fracción miemtras la nueva matriz tenga solamente un autovalor está excluida por el lema 3, ya que, por construcción, la nueva matriz debe tener elementos no nulos en, ó bajo, la diagonal.

Desde ahora supondremos que $s > 1$ y que estamos en las condiciones del problema (E). Comparamos la matriz (25)

$$A_o - \lambda I = \begin{pmatrix} H_1-\lambda I & & 0 \\ & H_2-\lambda I & \\ 0 & & H_s-\lambda I \end{pmatrix}$$

con la matriz

$$(26) \quad C_o - \lambda I = \begin{pmatrix} H_1-\lambda I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ C_{21} & H_2-\lambda I & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_{31} & C_{32} & H_3-\lambda I & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & \cdots & C_{s\,s-1} & H_s-\lambda I \end{pmatrix}$$

En particular, interesan los mayores divisores comunes $a_j(\lambda)$ y $c_j(\lambda)$, respectivamente, de los menores de orden j, $j = 1,2,\ldots,n$ en estas matrices .

Lema 4

Sean α_j, γ_j, j=1,2,...n, los grados de $a_j(\lambda)$ y $c_j(\lambda)$, respectivamente, y supongamos que $s > 1$. Entonces (27) $\gamma_j \leq \alpha_j$, j=1,2,...n y la desigualdad estricta es cierta al menos en una de las relaciones.

Demostración

Los polinomios $a_j(\lambda)$, $c_j(\lambda)$ son invariantes en las transformaciones elementales y también es posible, después de una sucesión de est s transformaciones cambiar $H_j-\lambda I$ en diagonal. Con s de estas transformaciones elementales, la matriz (25) $A_0-\lambda I$ ha sido cambiada en la

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & & \\ & \Lambda_2 & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & \Lambda_s \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad (28)\ \Lambda_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{m_j}$$

con j=1,2,. . . s y m_j la dimensión de H_j.

NOTA :

Los polinomios invariantes en las transformaciones elementales, así como los polinomios minimales y sus propiedades que necesitaremos después, se pueden ver en

Lang, S. Linear Algebra. Addison Wesley. 1.966.
Godement,R. Cours d'algèbre. Hermann . 1.966.
Gastinel, N. Análisis numérico lineal. Reverté.1.975.
Un desarrollo muy detallado del tema se encuentra en la obra de
Marcus,M. Introduction to modern algebra. Cap.IV. Marcel Dekker. New York. 1.978.

Si las mismas transformaciones elementales son introducidas en la matriz $C_0 - \lambda I$ (26), se tiene la matriz

$$(29) \quad \tilde{C}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \tilde{C}_{21} & \Lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \tilde{C}_{31} & \tilde{C}_{32} & \Lambda_3 & \cdot & \cdot & 0 \\ \tilde{C}_{s1} & \tilde{C}_{s2} & \tilde{C}_{s3} & \cdot & \cdot & \tilde{\Lambda}_s \end{pmatrix}$$

Todos los elementos de los C_{jk} son polinomios en λ. Los que interesan son aquellos de las esquinas inferiores derechas de cada $\tilde{C}_{jk}$, que llamaremos $\phi_{jk}(\lambda)$. En efecto, todos los demás elementos pueden ser supuestos cero, ya que conocemos la estructura de los Λ_j. Sin embargo, al menos uno de estos polinomios $\phi_{jk}(\lambda)$ es distinto de cero. Los coeficientes de los $\phi_{jk}(\lambda)$ son elementos de las últimas filas en los C_{jk}, y es $\phi_{jk}(\lambda) \equiv 0$ sí, y sólo si $C_{jk} = 0$, lo cual, por hipótesis no es cierto para todo C_{jk}.

Por medio de mas transformaciones elementales, si es necesario, el grado de $\phi_{jk}(\lambda)$ puede ser tomado menor que m_k y por lo tanto menor que m_j, ya que $k < j$.

Los únicos menores de $\tilde{A}(\lambda)$ distintos de cero, son aquellos formados por submatrices cuya diagonal principal forma parte de la diagonal principal de $\tilde{A}(\lambda)$. Su valor es el producto de estos elementos de la diagonal.

Los correspondientes menores de $\tilde{C}'(\lambda)$ tienen el mismo valor. Ello indica que para cada orden, los menores de $\tilde{A}(\lambda)$ no nulos, forman un subconjunto de los menores de $\tilde{C}(\lambda)$. Por lo que la desigualdad (27) es una consecuencia inmediata de este hecho.

Para completar la demostración del lema, basta construir, para algún valor de j, un menor, distinto de cero, de $\tilde{C}(\lambda)$ cuyo grado sea menor que α_j. Sea f , el entero mas pequeño, tal que uno de los polinomios ϕ_{kf}, k=f+1, f+2,... s es distinto de cero. Se considera la submatriz

$$\Gamma(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{m_f} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \phi_{f+1,1}(\lambda) & \lambda^{m_{f+1}} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{s,f}(\lambda) & \phi_{s,f+1}(\lambda) & \cdots & \phi_{s,s-1}(\lambda) & \lambda^{m_s} \end{pmatrix}$$

Esta formada por las filas y columnas de $\tilde{C}(\lambda)$ que contienen elementos distintos de cero. El menor minimal de orden uno de $\Gamma(\lambda)$ tiene grado menor que m_f, ya que todos los $\phi_{jk}(\lambda)$ en la primera columna de $\Gamma(\lambda)$ tienen grado menor que m_f. Por lo tanto, $\Gamma(\lambda)$ es equivalente a la matriz diagonal

$$\tilde{\Gamma}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{p_f} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{p_{f+1}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{p_s} \end{pmatrix}$$

con $p_f \leq p_{f+1} \leq \cdots \leq p_s$ y $p_f \leq m_f$. Las transformaciones elementales que cambian $\Gamma(\lambda)$ en $\tilde{\Gamma}(\lambda)$, cuando actuan en las correspondientes filas y columnas en toda la matriz $\tilde{C}(\lambda)$ no produce ningún otro cambio en $\tilde{C}(\lambda)$, ya que $\Gamma(\lambda)$ contiene todos los elementos distintos de cero de estas filas y columnas. Por consiguiente, $\tilde{C}(\lambda)$ es equivalente a

$$\tilde{\tilde{C}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & \Lambda_{f-1} & & & & \\ & & & \tilde{\Lambda}_f & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & \tilde{\Lambda}_s \end{pmatrix}$$

donde $\tilde{\Lambda}_k = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\,\lambda^{p_k} \end{pmatrix}$, $k=f, f+1, \ldots s$. Ahora se vé rápidamente, a partir de $\tilde{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & \\ & \Lambda_2 & \\ & & \ddots \; \Lambda_s \end{pmatrix}$ y (28) que $a_{n-s+f}(\lambda) = \lambda^{m_1+m_2+\ldots+m_f}$, es decir, $\alpha_{n-s+f} = m_1+m_2+\ldots+m_f$. El mismo polinomio $a_{n-s+f}(\lambda)$ es un menor de $\tilde{A}(\lambda)$, precisamente el formado por la intersección de las s-f filas y columnas que se encuentran en los elementos $\lambda^{m_{f+1}}$, $\lambda^{m_{f+2}}, \ldots, \lambda^{m_s}$ de la diagonal de $\tilde{A}(\lambda)$. El correspondiente menor de $\tilde{\tilde{C}}(\lambda)$ es $\lambda^{m_1+m_2+\ldots+p_f}$ que es de grado inferior a α_{n-s+f}. Lo que prueba el lema 4.

El lema 4 se cuida del único caso restante, es decir, aquel en el que se ha repetido toda la sucesión de reducciónes consistentes en : una aplicación del lema 2, una transformación de recorte, una transformación de semejanza de la matriz dominante en la forma canónica que conduce siempre a un problema del tipo (E) del mismo orden. Los grados de los maximos comunes divisores de los menores de orden j de $C_o - \lambda I$ deben ser cero para todo $j < n$. Para la matriz nilpotente C_o, esto indica que ella misma es una matriz de recorte, es decir s=1. Esto caso ya ha sido estudiado antes.

La cadena de transformaciones que en conclusión conducen a una solución asintótica de la ecuación diferencial $x^{-q}y' = A(x)y$, $q \geq 0$, consiste primero en unas transformaciones lineales con coeficientes que tienen desarrollos en series de potencias, convergentes ó asintóticas, de x con un exponente fraccionario, segundo multiplicaciones de algunas componentes de la variable dependiente por funciones escalares exponenciales de la forma $e^{ax^{\alpha}}$, donde a es un número complejo y α un número racional positivo y tercero sustituciones de alguna potencia fraccionaria de z, por x como variable independiente. Estas transformaciones son aplicadas a los sistemas de orden inferior que aparecen en las sucesivas r reducciones. Si agrupamos todas estas transformaciones en una sóla, ésta tendría la forma

(30) $x = Cte.t^{p}$, $p \in N$.

(31) $y = P(t)e^{Q_1(t)}z$.

La matriz P(t) depende del sector T, donde se ha obtenido la solución asintótica. Si la matriz original $A(x)$ era holomorfa en el infinito, entonces la posición del sector es arbitraria. Su ángulo central no debe exceder de un cierto valor, que depende de los varios valores que toma r_0, en las sucesivas reducciones. No se verá una caracterización explícita de este ángulo. En T, la matriz $F(t)$ tiene un desarrollo asintótico en serie de potencias de t^{-1}. Además $\det(F(t)) \neq 0$, para $t \neq 0$. La matriz $Q_1(t)$ es diagonal y polinómica en t.

La ecuación diferencial (32) $t^{-h}dz/dt=B(t)z$ que resulta por esta transformación, tiene una matriz $B(t)$ que es suma directa de matrices tales que cada uno de los sistemas de orden inferior en que se ha descompuesto (32) es de orden uno ó tiene una singularidad regular que puede ser resuelta por medio del teorema 2 del apartado 2.1. Todos los elementos diagonales de $Q_1(t)$ que corresponden a las mismas cajas de la descomposición de $B(t)$ tienen el mismo valor.

Por consiguiente, la ecuación diferencial (32) tiene una matriz fundamental que es suma directa de las soluciones de los sistemas separados de menor orden en que la hemos descompuesto. Esta matriz fundamental puede ser escrita de la forma $z=\tilde{z}(t)t^{G}e^{Q_2(t)}$ (33), donde $\tilde{z}(t)$ tiene un desarrollo asintótico en serie de potencias, y det $\tilde{z}(t) \neq o$, si $t \neq o$, G es una matriz constante, y $Q_2(t)$ es una matriz diagonal polinómica . Todas estas matrices son de cajas diagonales, correspondientes a la misma partición de B(t) . Si sustituimos (33) en (31) la matriz $e^{Q_1(t)}$, conmuta estructuralmente con $\tilde{z}(t)$ y t^G, y puede ser combinada con $e^{Q_2(t)}$. Entonces podemos enunciar todos estos resultados en forma de teorema , del siguiente modo:

<u>Teorema</u>

Sea A(x) una matriz función nxn, holomorfa para $|x|\geqslant x_o$, $x\in S$, donde S es un sector con vértice en el origen; se supone que A(x) tiene un desarrollo asintótico en serie de potencias de x^{-1}, cuando x tiende a infinito, en S. Entonces, para cada subsector de S, suficientemente pequeño, la ecuación diferencial $x^{-q}y' = A(x)y$ tiene una matriz fundamental de la forma $y(x) = \tilde{y}(x)\ x^{G}e^{Q(x)}$. Donde Q(x) es una matriz diagonal cuyos elementos son polinomios en $x^{1/p}$, con p entero positivo; G es una matriz constante, y $\tilde{y}(x)$ admite, para x tendiendo a infinito en este subsector, un desarrollo asintótico en serie de potencias de $x^{-1/p}$.

Este método es una adaptación del procedimiento desarrollado por Turrittin en 1.952 para problemas con un parámetro. La elección de la rama, de la función multivalente $x^{1/p}$ es arbitraria, pero evidentemente, la solución depende de esta elección.

Como aplicación de estos últimos capítulos, veamos una ecuación diferencial en particular.

Se trata de una pequeña generalización del ejemplo de Euler.

Sea $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}/(1+x^2t^2)\, dt$, luego

$f'(x) = \int_0^{\infty} -e^{-t}2xt^2/(1+x^2t^2)\, dt$ y por lo tanto

$xf'(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t/(1+x^2t^2)\, dt - f(x)$, sin mas que integrar por parte. Sea $f_1(x) = xf'(x) + f(x)$. Siguiendo el mismo tratamiento con $f_1(x)$ se tiene que

$xf_1'(x) + 2 f_1(x) = (1-f(x))/ x^2$, es decir

$1 = x^4f''(x) + 4x^3f'(x) + (2x^2+1)f(x)$

Ecuacion diferencial no homogénea de segundo orden, de

la que conocemos una solución particular que es $\int_0^{\infty} e^{-t}/(1+x^2t^2)$
Se trata de hallar dos soluciones correspondientes a un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea

$$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + (2x^2+1)f(x) = 0$$

a) El punto $x_0=\infty$ es un punto regular para esta ecuación, según la clasificación del capítulo V, por lo tanto existe solución en un entorno del infinito y esta solución es desarrollable en serie de potencias de x^{-1}. Para hallar ese desarrollo no hay mas que escribir $y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{-r}$ y obligar a esta serie a que verifique la ecuación diferencial, con lo que se obtienen dos posibles desarrollos :

$y_1 = x^{-1} - x^{-3}/2! + x^{-5}/4! \ . \ . \ .$

$y_2 = x^{-2} - x^{-4}/3! + x^{-6}/5! \ . \ . \ .$ es decir :

$y_1 = 1/x\ (\cos 1/x)$, $y_2 = 1/x(\operatorname{sen} 1/x)$

b) El punto $x=0$ es una singularidad irregular de rango finito, pasemos la ecuación diferencial a un sistema de dos ecuaciones diferenciales para utilizar la notación matricial del último capítulo.

Haciendo $\left.\begin{array}{l} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = y'' = -4x^{-1}y' - (2x^{-2}+x^{-4})y \end{array}\right.$

es decir :

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}) & -\frac{4}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A(x)\,\bar{y}$$

ó lo que es lo mismo (1) $x^4\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x^4 \\ -(2x^2+1) & -4x^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \overset{*}{A}(x)\,\bar{y}$

donde $\overset{*}{A}(x)$ es holomorfa en $x=0$, luego (1) es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con $x_0=0$ singularidad irregular de rango finito. Como el estudio se ha hecho para el punto del infinito, se hace el cambio $z=1/x$, con lo cual la ecuación diferencial queda de la forma $z^{-2}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -z^{-4} \\ \frac{2}{z^2}+1 & 4/z^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = B(z)\,\bar{y}$

donde $B(z)$ es holomorfa en el infinito.

$$B(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} 1/z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} 1/z^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} 1/z^3 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} 1/z^4$$

Para seguir el orden establecido en este último capítulo y tener la matriz nilpotente dominante, cambiamos el orden de las componentes del vector $\bar{y}$, con lo que la ecuación diferencial queda de la forma :

(2) $z^{-2}\begin{pmatrix} y_2' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/z^3 & \frac{2}{z^2}+1 \\ -1/z^4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \bar{A}(z)\,\bar{\bar{y}} = z^{-2}\,\bar{\bar{y}}\,'$

$$\bar{A}(z) = \underset{A_0}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} + \underset{A_1}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} z^{-1} + \underset{A_2}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} z^{-2} + \underset{A_3}{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} z^{-3} + \underset{A_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} z^{-4}$$

Y aplicando el lema 2, existe, en cualquier sector S (con ángulo central menor que $\pi/3$), una función holomorfa $P(z)$ en S, para $|z|> z_o$, con un desarrollo asintótico $P(z) \sim \sum_{r=0}^{\infty} P_r z^{-r}$, cuando z tiende a infinito en S, que transforma la ecuación diferencial (2) en una ecuación $z^{-2}\bar{z}' = B(z)\bar{z}$, mediante el cambio $\bar{y} = P(z)\bar{z}$, donde $B(z)$ está en las condiciones especiales del lema .

Tomamos $B_o = A_o$, $P_o = I$, y mediante las ecuaciones resultantes del cambio , tenemos

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

. . . .

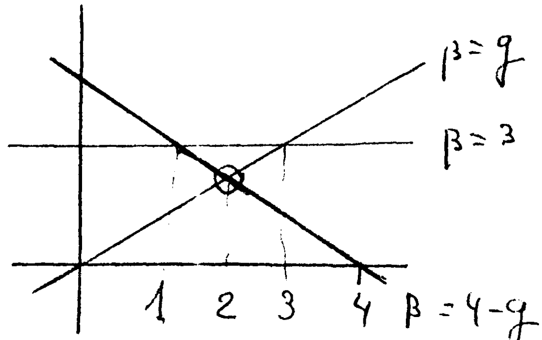
Es decir, $B(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^{-1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^{-2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} z^{-3} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z^{-4} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} z^{-5} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} z^{-6} + \ldots$

Y siguiendo el proceso descrito, hacemos uso del nuevo cambio $\bar{z} = S(z)\bar{y}^*$. Con $S(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-g} \end{pmatrix}$, y la nueva ecuación será $z^{-2}\bar{y}^{*\prime} = A^*(z)\bar{y}^*$, donde

$$A^*(z) = S^{-1}(z)B(z)S(z) - z^{-q}S^{-1}(z)S'(z)$$

$$A^*(z) = \begin{pmatrix} z^{g-4}(-1 + 10z^{-2} + \ldots) & z^{-3}(g+4-4z^{-2} + \ldots) \end{pmatrix}$$

Y para obtener el g adecuado hacemos gráficamente las intersecciones :



$\beta_{11} = 0 \qquad \beta_{12} = g$

$\beta_{21} = 4-g \qquad \beta_{22} = 3$

$\Rightarrow g_0 = 2$ y efectivamente,

$$\lim_{z\to\infty} z^2 A^*(z) = \lim_{z\to\infty}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1+10z^{-2}+\dots) & z^{-1}(2+4+-4z^{-2}+\dots) \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, es dcir, si multiplicamos la ecuación diferencial por z^2, se tiene $z^{2-2}\bar{y}^{*\prime} = \underbrace{z^2 A^*(z)}_{A^{**}(z)}\,\bar{y}^* \iff$

$$\iff \bar{y}^{*\prime} = A^{**}(z)\bar{y}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1+10z^{-2}\dots & z^{-1}(6+4z^{-2}+\dots \end{pmatrix}\bar{y}^*$$

$A^{**}(z)$ es holomorfa para $z=\infty$, luego la solución de esta última ecuación diferencial se puede obtener igual que se hizo para el infinito al principio, mediante una serie de potencias de z^{-1}, ya que ahora $z=\infty$ es un punto regular para la nueva ecuación diferencial.

Luego $\bar{y}^* = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^{-r} \Rightarrow \bar{z} = S(z)\,\bar{y}^* \Rightarrow \bar{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-2} \end{pmatrix} \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^{-r}$

$\Rightarrow \bar{\bar{y}} = P(z)\,\bar{z}$, es decir $\bar{\bar{y}} = \left(\sum_{r=1}^{\infty} P_r z^{-r}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-2} \end{pmatrix} \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^{-r}$.

$\bar{\bar{y}} = \left(\sum_{r=1}^{\infty} P_r x^r\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}\left(\sum_{r=0}^{\infty} A_r x^r\right)$, es decir para hallar $\bar{y}$ bastará cambiar el orden de las componentes de $\bar{\bar{y}}$.

Bibliografía :

Carrier, G.F.;Krook,M and Pearson,C.E. Functions of a complex variable. MacGraw Hill .New York . 1.966.

Copson, E.T. Asymptotic expansions. Cambridge Univ. Press. Cambridge. 1.965.

Erdelyi, A. Asymptotic expansions.Dover Publications.Inc. New York. 1.956.

Jeffreys, H. Asymptotic approximations. Clarendon Press. Oxford. 1.962.

Kamke, E. Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Akademische Verlagsgesellschaft. Leipzig.1.943.

Lelong-Ferrand, J.; Arnaudiés, J.M. Análisis. Edit. Reverté. Barcelona. 1.980.

Murray, J.D. Asymptotic Analysis. Clarendon Press. Oxford. 1.974.

Sirovich, L Techniques of asymptotic analysis . Springer--Verlag. New York, Heidelberg, Berlin . 1.971.

Wasow, W. Asymptotic expansions for ordinary Differential equations. Interscience publishers . New York. 1.965.

Asymptotic Solutions of differential equations and their applications. Proceedings of a symposium. Univ. de Wisconsin. Madison. John Wiley. New York. 1.964.

Ordinary and Partial differential equations. Proceedings, Dundee, Scotland (1.978). Lecture Notes N. 827.-